BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

Tập 11, Số 1
2017

TẠP CHÍ KHOA HỌC

CHUYÊN SAN ĐẶC BIỆT: TOÁN HỌC

Quy Nhơn, tháng 3-2017

Lời tựa

Nhằm kết nối, thúc đẩy hoạt động nghiên cứu, giảng dạy và ứng dụng toán học giữa các trường đại học, cao đẳng khu vực Miền Trung–Tây Nguyên và cả nước, Trường Đại học Quy Nhơn đăng cai tổ chức "*Hội nghị Toán học Miền Trung–Tây Nguyên*" lần thứ nhất diễn ra từ ngày 12 đến 14 tháng 8 năm 2015. Hội nghị có khoảng 190 người tham gia với hơn 110 đại biểu báo cáo, trong đó có 3 báo cáo mời toàn thể, 10 báo cáo mời tiểu ban và các báo cáo ngắn tại các tiểu ban:

1. Đại số – Hình học – Tôpô,
2. Giải tích toán học,
3. Tối ưu và Tính toán khoa học,
4. Xác suất – Thống kê và Toán tài chính,
5. Giảng dạy và Lịch sử toán học.

Đây là số đặc biệt của Tạp chí Khoa học Trường Đại học Quy Nhơn dành cho Hội nghị này. Các bài báo trong số này là các kết quả tổng quát hơn của một số kết quả mà các tác giả đã đăng ký tham gia báo cáo tại Hội nghị. Đồng thời, các kết quả này đã được các chuyên gia thẩm định theo quy trình phản biện thông thường của một tạp chí.

Ban tổ chức Hội nghị trân trọng cảm ơn các tác giả đã đóng góp các kết quả của mình, các chuyên gia đã phản biện để chúng tôi hoàn thành Cuốn tạp chí số này.

Tạp chí Khoa học Trường Đại học Quy Nhơn
ISSN: 1859-0357
Tập 11, Số 1, Năm 2017

MỤC LỤC

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017, Tr.5-15

On 2-antiparallel encounters on factors of the hyperbolic plane

Huỳnh Minh Hiền
Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, Quy Nhơn, Bình Định.
Email: huynhminhhien@qnu.edu.vn

Abstract

In this paper, we consider the geodesic flow on factors of the hyperbolic plane. We prove that a periodic orbit including a 2-antiparallel encounter has a partner orbit. We construct the partner orbit and give an estimate for the action different between the orbit pair. Then we apply the result to reprove the accuracy of Sieber/Richter's prediction.

Keywords: Geodesic flow, Partner orbit, Sieber-Richter pair, 2-antiparallel encounter

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xét dòng trắc địa trên các không gian thương của mặt phẳng hyperbolic. Chúng tôi chứng minh rằng một quỹ đạo tuần hoàn chứa một encounter đối song cho trước luôn sở hữu một quỹ đạo đồng hành. Quỹ đạo đồng hành này được xây dựng cụ thể và độ lệch tác dụng giữa nó và quỹ đạo ban đầu được đánh giá chi tiết; đồng thời áp dụng kết quả này để chứng minh lại tính đúng đắn của dự đoán Sieber/Richter.

1 Introduction

The two-point correlator function of a classical dynamical system can be illustrated as a double sum over periodic orbits

$$K(\tau) = \Big\langle \frac{1}{T_H} \sum_{\gamma,\gamma'} A_\gamma A^*_{\gamma'} e^{\frac{i}{\hbar}(S_\gamma - S_{\gamma'})} \delta\Big(\tau T_H - \frac{T_\gamma + T_{\gamma'}}{2}\Big)\Big\rangle, \tag{1}$$

where $\langle\cdot\rangle$ abbreviates the average over the energy and over a small time window, T_H denotes the Heisenberg time and A_γ, S_γ, and T_γ are the amplitude, the action, and the period of the orbit γ, respectively. As one is interested in the semiclassical limit $\hbar \to 0$, it is expected that only orbit pairs γ, γ' such that $S_\gamma - S_{\gamma'} \sim \hbar$ or small. Formulated in more mathematical terms, for a classical chaotic dynamical system the problem is to determine the periodic orbit pairs γ, γ' such that S_γ is close to $S_{\gamma'}$, and then calculate (1).

This was first considered by Sieber and Richter [16, 17] who predicted that a given periodic orbit with a small-angle self-crossing in configuration space will admit a partner orbit with almost the same action. The original orbit and its partner are called a Sieber-Richter pair. In phase space, a Sieber-Richter pair contains a region where two stretches of each orbit are almost

Ngày nhận bài: 12/11/2015 ; ngày nhận đăng: 28/06/2016

mutually time-reversed and one addresses this region as a 2-*encounter* or, more strictly, a 2-*antiparallel encounter*; the '2' stands for two orbit stretches which are close in configuration space, and 'antiparallel' means that the two stretches have opposite directions. The accuracy of Sieber/Richter's prediction was completely proven by Huynh/Kunze in [11]. In that paper the authors considered the geodesic flow on compact factors of the hyperbolic plane. It was shown in [11] that a T-periodic orbit of the geodesic flow crossing itself in configuration space at a time T_1 has $9|\sin(\phi/2)|$-partner orbit and the action difference between them is approximately equal $\ln(1-(1+e^{-T_1})(1+e^{-(T-T_1)})\sin^2(\phi/2)))$ with the estimated error $12\sin^2(\phi/2)e^{-T}$, where ϕ is the crossing angle.

Periodic orbits with L-parallel encounters was investigated by Müller et al. in [8, 14, 15]. We speak of an *L-encounter* when L stretches of a periodic orbit are mutually close to each other up to time reversal. In other words, all the L stretches must intersect a small Poincaré section. Müller et al. used combinatorics to count the number of partner orbits and provided an approximation for the action difference, but a construction of partner orbits and an error bound of the approximation had not been derived. Then, Huynh [10] continued considering the hyperbolic dynamical system in [11] to deal with the technically more involved higher-order encounters. The author proved that a given periodic orbit including an L-parallel encounter has $(L-1)!-1$ partner orbits, constructed partner orbits and gave estimates for the action differences between orbit pairs. Furthermore, mathematical definitions for 'encounters', 'partner orbits', etc. were also arrived in [10].

In the case of L-antiparallel encounter with general L, the problem is a very complicated and it is still open. In this paper, we only consider the problem for $L = 2$. We prove that a periodic orbit with 2-antiparallel encounter has a partner orbit. If the space is compact, then the partner is unique. Then we apply the result to prove Sieber/Richter's prediction and derive a better estimate for the action difference.

The paper is organized as follows. In Section 2 we introduce the necessary background material. Then in Section 3 we consider orbits with 2-antiparallel encounters. We prove that an orbit with a 2-antiparallel encounter has a partner orbit. Then we apply this result to reprove the accuracy of Sieber/Richter's prediction.

2 Preliminaries

We consider the geodesic flow on factor $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, where $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ is the hyperbolic plane endowed with the hyperbolic metric $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$ and Γ is a discrete subgroup of the projective Lie group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm E_2\}$. The group $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ acts transitively on $\mathbb{H}^2$ by Möbius transformations $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. If the action is free (of fixed points), then the factor $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ has a Riemann surface structure. Such a surface is a closed Riemann surface of genus at least 2 and has the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2$ as the universal covering. If the space $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ is compact, then all the elements in $\Gamma \setminus \{e\}$ are hyperbolic, i.e., $\mathrm{tr}(\gamma) = |a+d| > 2$ for $\gamma = \left\{ \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \in \Gamma \setminus \{e\}$. The geodesic flow $(\varphi_t^{\mathcal{X}})_{t\in\mathbb{R}}$ on the unit tangent bundle $\mathcal{X} = T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ goes along the unit speed geodesics on $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$. On the other hand, the unit tangent bundle $T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ is isometric to the quotient space $\Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \{\Gamma g, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\}$, which is the system of right co-sets of Γ in $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, by an isometry Ξ. Then the geodesic flow $(\varphi_t^{\mathcal{X}})_{t\in\mathbb{R}}$ can be equivalently expressed as the natural 'quotient flow' $\varphi_t^X(\Gamma g) = \Gamma g a_t$ on $X = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ associated to the flow $\varphi_t^{\mathsf{G}}(g) = g a_t$ on $\mathsf{G} := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ by the conjugate relation

$$\varphi_t^{\mathcal{X}} = \Xi^{-1} \circ \varphi_t^X \circ \Xi \quad \text{for all} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Here $a_t \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ denotes the equivalence class obtained from the matrix $A_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

There are some more advantages to work on $X = \Gamma\backslash\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ rather than on $\mathcal{X} = T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$. One can calculate explicitly the stable and unstable manifolds at a point $x = \Gamma g \in X$ to be

$$W_X^s(x) = \{\Gamma g b_s, s \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \quad W_X^u(x) = \{\Gamma g c_u, u \in \mathbb{R}\},$$

where $b_s, c_u \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ denote the equivalence classes obtained from $B_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. If the space is compact, the flow $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ is hyperbolic.

General references for this section are [2, 5, 12], and these works may be consulted for the proofs to all results which are stated above.

For $\phi \in \mathbb{R}$, denote by $d_\phi \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ the equivalence class obtained from

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Lemma 1. *(a) The following relations hold for $t \in \mathbb{R}$:*

$$a_t d_\pi = d_\pi a_{-t}, \quad b_t d_\pi = d_\pi c_{-t}, \quad c_t d_\pi = d_\pi b_{-t}. \tag{1}$$

(b Let $g = [G] \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ for $G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. If $a \neq 0$, then $g = c_u b_s a_t$ for

$$t = 2\ln|a|, \quad s = ab, \quad u = \frac{c}{a}. \tag{2}$$

Proof. (a) In $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ we calculate

$$\begin{aligned} A_t D_\pi &= \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{t/2} \\ -e^{-t/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} \\ &= D_\pi A_{-t} \end{aligned}$$

which upon projection yields the first one. The argument is analogous for the others.

(b) Let (t, s, u) be given by (2). To begin with,

$$C_u B_s A_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & se^{-t/2} \\ ue^{t/2} & (1+su)e^{-t/2} \end{pmatrix}.$$

If $a > 0$, then $e^{t/2} = a$, $se^{-t/2} = b$, $ue^{t/2} = c$, and $(1+su)e^{-t/2} = (1+bc)/a = d$, using that $ad-bc = 1$. Thus $C_u B_s A_t = G$ and $c_u b_s a_t = g$. If $a < 0$, then $e^{t/2} = -a$, $se^{-t/2} = -b$, $ue^{t/2} = -c$, and $(1+su)e^{-t/2} = -(1+bc)/a = -d$, and hence $C_u B_s A_t = -G$ which yields once again that $c_u b_s a_t = g$. □

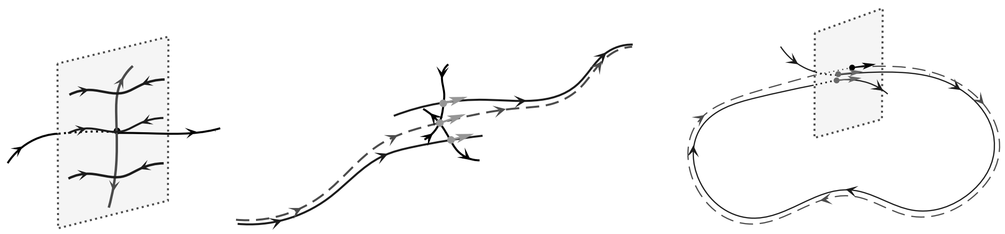


Figure 1: (a) Poincaré section (b) Shadowing lemma (c) Anosov closing lemma

We recall the definition of Poincaré sections, shadowing lemma and the Anosov closing lemma in [11].

Definition 2. Let $x \in X$ and $\varepsilon > 0$. The *Poincaré section* of radius ε at x is

$$\mathcal{P}_\varepsilon(x) = \{\Gamma(gc_u b_s) : |u| < \varepsilon, |s| < \varepsilon\},$$

where $g \in \mathsf{G}$ is such that $x = \Gamma g$ (see Figure 1 (a)).

See Figure 1 (b)&(c) for an illustration of the next two results.

Theorem 3 (Shadowing lemma). *If $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2 \in X$, and $x \in W^s_{X,\varepsilon}(x_1) \cap W^u_{X,\varepsilon}(x_2)$, then*

$$d_X(\varphi^X_t(x_1), \varphi^X_t(x)) < \varepsilon e^{-t} \quad \textit{for all} \quad t \in [0, \infty[$$

and

$$d_X(\varphi^X_t(x_2), \varphi^X_t(x)) < \varepsilon e^{t} \quad \textit{for all} \quad t \in]-\infty, 0];$$

recall $W^s_{X,\varepsilon}(x) = \{\Gamma g b_s : |s| < \varepsilon\}$, $W^u_{X,\varepsilon}(x) = \{\Gamma g c_u : |u| < \varepsilon\}$, for any $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ such that $\Gamma g = x$.

Theorem 4 (Anosov closing lemma). *Suppose that $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}[$, $x \in X$, $T \geq 1$, and $\varphi^X_T(x) \in \mathcal{P}_\varepsilon(x)$. Let $x = \Gamma g$ and $\varphi^X_T(x) = \Gamma g c_u b_s$ for $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, $|u| < \varepsilon$, $|s| < \varepsilon$. Then there are $x' \in \mathcal{P}_{2\varepsilon}(x)$ and*

$T' \in \mathbb{R}$ so that

$$\varphi^X_{T'}(x') = x' \quad \textit{and} \quad d_X(\varphi^X_t(x), \varphi^X_t(x')) < 2(|u| + |s|) \quad \textit{for all} \quad t \in [0, T].$$

Furthermore,

$$e^{T'/2} + e^{-T'/2} = e^{T/2} + e^{-T/2} + use^{-T/2} \tag{3}$$

and

$$\Big|\frac{T' - T}{2} - \ln(1 + us)\Big| < 5|us|e^{-T}.$$

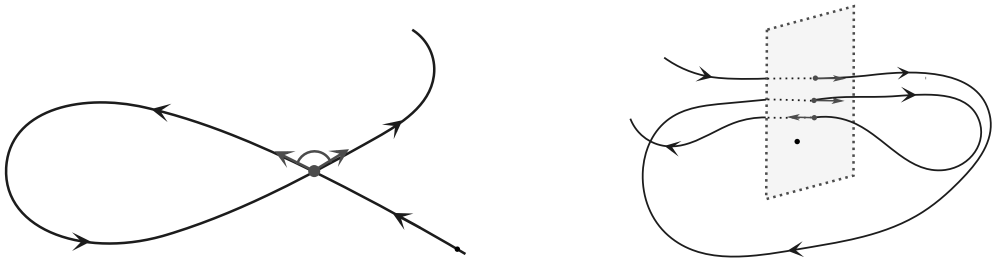


Figure 2: (a) An orbit with a self-crossing in configuration space (b) An orbit with a 3-antiparallel encounter

See Figure 2 (a) for an illustration for the next result.

Theorem 5 (Self-crossings). *Suppose that all elements of $\Gamma \setminus \{e\}$ are hyperbolic and let $\tau \in \mathbb{R}$, $L > 0$, $\theta \in]0, \pi[$, and $\mathtt{x} \in \mathcal{X}$ be given. The orbit of $\mathtt{x}$ under the geodesic flow $(\varphi^{\mathcal{X}}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ crosses itself in configuration space at the time τ, at the angle θ, and creates a loop of length L if and only if*

$$\textit{either} \quad \Gamma g a_{\tau+L} = \Gamma g a_\tau d_\theta \quad \textit{or} \quad \Gamma g_{\tau+L} = \Gamma g a_\tau d_{-\theta} \tag{4}$$

holds for any $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}), \Gamma g = \Xi(\mathtt{x})$. Furthermore,

$$e^{-L} < \cos^2\Big(\frac{\theta}{2}\Big). \tag{5}$$

The following definitions can be found in [10].

Definition 6 (Time reversal). The *time reversal map* $\mathcal{T} : X \to X$ is defined by

$$\mathcal{T}(x) = \Gamma g d_\pi \quad \text{for} \quad x = \Gamma g \in X,$$

where $d_\pi \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ is the equivalence class of the matrix $D_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Using Lemma 1 (a), we have

$$\varphi_t^X(\mathcal{T}(x)) = \mathcal{T}(\varphi_{-t}^X(x)) \quad \text{for} \quad x \in X \quad \text{and} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Definition 7 (Orbit pair/Partner orbit). Let $\varepsilon > 0$ be given. Two given T-periodic orbit c and T'-periodic orbit c' of the flow $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ are called an *ε-orbit pair* if there are $L \geq 2, L \in \mathbb{Z}$ and two decompositions of $[0,T]$ and $[0,T'] : 0 = t_0 < \cdots < t_L = T$ and $0 = t'_0 < \cdots < t'_L = T'$, and a permutation $\sigma : \{0, 1, \ldots, L-1\} \to \{0, 1, \ldots, L-1\}$ such that for each $j \in \{0, \ldots, L-1\}$, either

$$d_X(\varphi_{t+t_j}^X(x), \varphi_{t+t'_{\sigma(j)}}^X(x')) < \varepsilon \quad \text{for all} \quad t \in [0, t_{j+1} - t_j]$$

or

$$d_X\Big(\varphi_{t+t_j}^X(x), \varphi_{t-t'_{\sigma(j)+1}}^X(\mathcal{T}(x'))\Big) < \varepsilon \quad \text{for all} \quad t \in [0, t_{j+1} - t_j]$$

holds for some $x \in c$ and $x' \in c'$. Then c' is called an *ε-partner orbit* of c and vice versa.

Roughly speaking, two periodic orbits are an ε-orbit pair if they are ε-close to each other in configuration space, not for the whole time, since otherwise they would be identical, but they decompose to the same number of parts and any part of one orbit is ε-close to some part of the other.

Definition 8 (Encounter). Let $\varepsilon > 0$ and $L \in \mathbb{Z}, L \geq 2$ be given. We say that a periodic orbit c has an *(L, ε)-encounter* if there are $x \in X$, $x_1, \ldots, x_L \in c$ such that for each $j \in \{1, \ldots, L\}$,

$$\text{either} \quad x_j \in \mathcal{P}_\varepsilon(x) \quad \text{or} \quad \mathcal{T}(x_j) \in \mathcal{P}_\varepsilon(x).$$

If either $x_j \in \mathcal{P}_\varepsilon(x)$ holds for all $i = 1, \ldots, L$ or $\mathcal{T}(x_j) \in \mathcal{P}_\varepsilon(x)$ holds for all $j = 1, \ldots, L$ then the encounter is called *parallel encounter*; otherwise it is called *antiparallel encounter* (see Figure 2 (b)).

3 Main results

3.1 2-Antiparallel encounters

In this section we only consider 2-antiparallel encounters. It is impossible to reconnect the ports in 2-parallel encounter to get a new (genuine) partner orbit; but in the case of antiparallel encounter, we have the following result.

Theorem 9. *Suppose that all the elements in $\Gamma \setminus \{e\}$ are hyperbolic and let $\varepsilon > 0$. If a periodic orbit c of the flow $(\varphi_t^X)_{t\in\mathbb{R}}$ on X with period $T > 1$ has a $(2, \varepsilon)$-antiparallel encounter, then it has a partner. Furthermore, let $x, y \in c$, $x = \Gamma g$ and $\mathcal{T}(y) = \Gamma g c_u b_s \in \mathcal{P}_\varepsilon(x)$ for $g \in \mathsf{G}, |u| < \varepsilon, |s| < \varepsilon$; $\varphi_{T_1}^X(x) = y, 0 < T_1 < T$. Then the partner is ε'-partner with $\varepsilon' = \varepsilon + 2(|u - se^{-T_1}| + |s - ue^{T_1 - T}|) < 9\varepsilon$ and* *the action difference between the orbit pair satisfies*

$$\Big|\frac{T'-T}{2}-\ln\big(1+(u-se^{-T_1})(s-ue^{T_1-T})\big)\Big|\leq|(u-se^{-T_1})(s-ue^{T_1-T})|e^{-T}, \tag{7}$$

where T' is the period of the partner.

Proof. Let $x=\Gamma g$ and write $y=\Gamma h$ with $g,h\in\mathsf{G}$ and set $g'=gd_\pi, h'=hd_\pi, T_2=T-T_1$. Then by the assumption $\mathcal{T}(y)=\Gamma h'=\Gamma gc_ub_s$ or $\Gamma h=\Gamma g'b_{-u}c_{-s}$ due to Lemma 1 (a). This implies that $w:=\Gamma h'b_{-s}=\Gamma gc_u\in W^s_{X,\varepsilon}(y')\cap W^u_{X,\varepsilon}(x)$. By the shadowing lemma (Theorem 3),

$$d_X(\varphi^X_t(y'),\varphi^X_t(w))<\varepsilon e^{-t}\quad\text{for all}\quad t\in[0,\infty[\tag{8}$$

and

$$d_X(\varphi^X_t(x),\varphi^X_t(w))<\varepsilon e^{t}\quad\text{for all}\quad t\in]-\infty,0]. \tag{9}$$

Putting $\hat{w}=\varphi^X_{-T_2}(w)=\Gamma gc_ua_{-T_2}=\Gamma h'b_{-s}a_{-T_2}$, we claim that $\varphi^X_T(\hat{w})\in\mathcal{P}_{2\varepsilon}(\hat{w})$. Indeed,

$$\begin{aligned}\varphi^X_T(\hat{w}) &= \Gamma h'b_{-s}a_{T_1}=\Gamma g'a_{-T_1}b_{-s}a_{T_1}=\Gamma g'b_{-se^{-T_1}}=\Gamma hc_sb_ub_{-se^{-T_1}}\\ &= \Gamma ga_{-T_2}c_sb_{u-se^{-T_1}}=\Gamma(gc_ua_{-T_2})(a_{T_2}c_{-u}a_{-T_2}c_sb_{u-se^{-T_1}})\\ &= \Gamma gc_ua_{-T_2}(c_{-ue^{-T_2}}c_sb_{u-se^{-T_1}})=\Gamma(gc_ua_{-T_2})(c_{-ue^{-T_2}+s}b_{u-se^{-T_1}})\\ &= \Gamma(gc_ua_{-T_2})(c_{u'}b_{s'})\end{aligned}$$

with

$$u'=s-ue^{-T_2},\quad s'=u-se^{-T_1}. \tag{10}$$

Apply the Anosov closing lemma (Theorem 4) to obtain $v\in X, T'\in\mathbb{R}$ such that $\varphi^X_{T'}(v)=v$,

$$\Big|\frac{T'-T}{2}-\ln(1+u's')\Big|<5|u's'|e^{-T},$$

and

$$d_X(\varphi^X_t(\hat{w}),\varphi^X_t(v))<2(|u'|+|s'|)\quad\text{for all}\quad t\in[0,T]. \tag{11}$$

For $t\in[0,T_1]$, it follows from (9) and (11) that

$$\begin{aligned}d_X(\varphi^X_t(v),\varphi^X_t(y')) &\leq d_X(\varphi^X_t(v),\varphi^X_t(\hat{w}))+d_X(\varphi^X_t(\hat{w}),\varphi^X_t(y'))\\ &\leq d_X(\varphi^X_t(v),\varphi^X_t(\hat{w}))+d_X(\varphi^X_t(\varphi^X_{-T_1}(w)),\varphi^X_t(\varphi^X_{-T_1}(x')))\\ &\leq 2(|u'|+|s'|)+d_X(\varphi^X_{t-T_1}(w),\varphi^X_{t-T_1}(x'))\\ &< 2(|u'|+|s'|)+\varepsilon=\varepsilon'.\end{aligned}$$

Similarly, for $t \in [T_1, T]$, it follows from (8) and (11) that

$$\begin{aligned} d_X(\varphi_t^X(v), \varphi_t^X(y)) &= d_X(\varphi_t^X(v), \varphi_{t-T_1}^X(y)) \leq d_X(\varphi_t^X(v), \varphi_t^X(\hat{w})) + d_X(\varphi_t^X(\hat{w}), \varphi_{t-T_2}^X(y)) \\ &\leq 2(|u'| + |s'|) + d_X(\varphi_{t-T_2}^X(w), \varphi_{t-T_2}^X(y)) \\ &\leq 2(|u'| + |s'|) + \varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

We can easily check that the partner is a ε'-partner orbit in the sense of Definition 7. □

Nhận xét 10. *It follows from* (3) *and* (10) *that*

(i) $T' > T$ *if and only if* $(s - ue^{-T_2})(u - se^{-T_1}) > 0$;

(ii) $T' < T$ *if and only if* $(s - ue^{-T_2})(u - se^{-T_1}) > 0$;

(iii) $T' = T$ *if and only if* $(s - ue^{-T_2})(u - se^{-T_1}) = 0$.

3.2 An application to Sieber-Richter pairs

A periodic orbit with a small-angle self-crossing has 2 almost mutually time-revered stretches. This means that the orbit crosses the Poincaré section of a point in this orbit and Theorem 9 may be applied.

Theorem 11. *If a periodic orbit of the geodesic flow* $(\varphi_t^{\mathcal{X}})_{t\in\mathbb{R}}$ *on* $\mathcal{X} = T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ *with the period* $T \geq 1$ *crosses itself in configuration space at a time* $T_1 \in]0, T[$ *and at an angle* θ *such that* $0 < \phi < \frac{1}{3}$ *for* $\phi = \pi - \theta$, *then it has a* $6|\sin(\phi/2)|$*-partner orbit. Furthermore,* $T' < T$ *for the period of the partner and the action difference satisfies*

$$\left|\frac{T' - T}{2} - \ln\left(1 - \sin^2(\phi/2)(\cos^{-2}(\phi/2) + e^{-T_1})(\cos^2(\phi/2) + e^{T_1 - T})\right)\right| \leq 2\sin^2(\phi/2)e^{-T}. \quad (12)$$

Proof. Let the orbit of $\mathtt{x} \in \mathcal{X} = T^1(\Gamma\backslash\mathbb{H}^2)$ be T-periodic (T is the prime period) and such that it has a self-crossing of angle θ in configuration space at the time $T_1 \in]0, T[$, i.e., we have

$$\varphi_{T_1}^{\mathcal{X}}(\mathtt{x}) = \mathtt{y}, \quad \varphi_{T_2}^{\mathcal{X}}(\mathtt{y}) = \mathtt{x}, \quad (13)$$

where $T = T_1 + T_2$; see Figure 3.

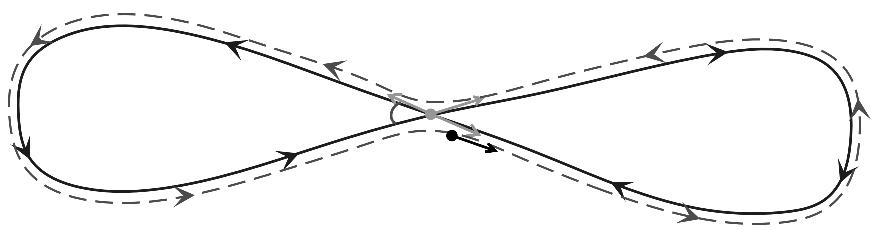


Figure 3: Small self-crossing angle and partner orbit

In addition, assume that $|\phi| < \frac{1}{3}$ with $\phi = \pi - \theta$. Then in particular

$$\left| \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right| \leq \frac{|\phi|}{2} < \frac{1}{6} \tag{14}$$

holds. Set $x = \Xi(\mathrm{x})$ and $y = \Xi(\mathrm{y})$. This follows from Theorem 5 that

$$\Gamma g = \Gamma h d_\theta \quad \text{or} \quad \Gamma g = \Gamma h d_{-\theta} \tag{15}$$

with some $h, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ such that $\Gamma g = x$ and $\Gamma h = y$. We only consider the first case, the latter is similar. Write $x' = \mathcal{T}(x)$ and $y' = \mathcal{T}(y)$; recall the notation $\mathcal{T}$ from Definition 6. Then

$$\Gamma g d_{\pi-\theta} = \Gamma h d_\pi = y' \quad \text{or} \quad \Gamma g d_\phi = y'.$$

We write

$$d_\phi = c_u b_s a_\tau, \tag{16}$$

where

$$\tau = 2\ln(\cos(\phi/2)), \quad u = \tan(\phi/2), \quad s = -\sin(\phi/2)\cos(\phi/2).$$

By (14), we have

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) > \frac{5}{6}. \tag{17}$$

Then

$$|u| = |\tan(\phi/2)| \leq \frac{6}{5}|\sin(\phi/2)| =: \varepsilon, \ |s| = |\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)| \leq |\sin(\phi/2)| < \varepsilon, \tag{18}$$

and

$$|\tau| = |\ln(1 - \sin^2(\phi/2))| \leq 2\sin^2(\phi/2) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

due to $|\ln(1+z)| \leq 2|z|$ for $|z| \leq 1/2$. Denote $\tilde{y} = \varphi^X_{-\tau}(y)$. This leads to

$$\mathcal{T}(\tilde{y}) = \varphi^X_\tau(y') = \Gamma h a_{-\tau} = \Gamma g c_u b_s \in \mathcal{P}_\varepsilon(x),$$

using (6). We are in a position to apply Theorem 9 to have $v \in X$ and $T' \in \mathbb{R}$ such that $\varphi^X_{T'}(v) = v$ and the orbit of v is ε'-partner of the orbit of x, where ε' is determined later. Note that

$$\begin{aligned} (s - ue^{-T_2})(u - se^{-T_1}) &= \big(-\sin(\phi/2)\cos(\phi/2) - \tan(\phi/2)e^{-T_2}\big) \times \\ &\quad \big(\tan(\phi/2) + \sin(\phi/2)\cos(\phi/2)e^{-T_1}\big) \\ &= -\sin^2(\phi/2)(\cos^{-2}(\phi/2) + e^{-T_1})(\cos^2(\phi/2) + e^{-T_2}) < 0 \end{aligned}$$

implies $T' < T$ owing to Remark 10. Furthermore, using (5) and (14)

$$e^{-T_1} < \sin^2(\phi/2) < \frac{1}{36} \quad \text{and} \quad e^{-T_2} < \sin^2(\phi/2) < \frac{1}{36}, \tag{19}$$

yields

$$|(s - ue^{-T_2})(u - se^{-T_1})| < 2\sin^2(\phi/2)e^{-T}$$

and hence

$$\Big|\frac{T - T'}{2} - \ln\big(1 - \sin^2(\phi/2)(\cos^{-2}(\phi/2) + e^{-T_1})(\cos^2(\phi/2) + e^{-T_2})\big)\Big| \le 2\sin^2(\phi/2)e^{-T}$$

which is 12. Finally,

$$\varepsilon' = \varepsilon + 2(|s - ue^{-T_2}| + |u - se^{-T_1}|) \le \frac{6}{5}|\sin(\phi/2)| + \frac{68}{15}|\sin(\phi/2|) < 6|\sin(\phi/2)|$$

by (18) and (19); and therefore the partner is a $6|\sin(\phi/2)|$-partner orbit. □

Remark 12. (i) Recall from [11] that the partner is a $9|\sin(\phi/2)|$-partner and the action difference satisfies

$$\Big|\frac{T' - T}{2} - \ln\big(1 - (1 + e^{-T_1})(1 + e^{-(T-T_1)})\sin^2(\phi/2)\big)\Big| \le 12\sin^2(\phi/2)e^{-T}.$$

This means that the orbits in a Sieber-Richter pair are estimated closer in this paper and the estimate of the action difference is also better.
(ii) As mentioned in [13], the partner orbit is avoided crossing. This means that it does not cross itself in encounter area. Conversely, a periodic orbit with 2 stretches almost mutually time-reversed and avoiding crossing has a partner orbit with a small-angle self-crossing in encounter area. Indeed, since the two stretches are almost mutually time-reversed, there are $x = \Gamma g$ and y on that orbit such that x and $\mathcal{T}(y)$ are very close. Using Lemma 1 we write $\mathcal{T}(y) = \Gamma g c_u b_s a_\tau$ with $|u|, |s| < \varepsilon$ for some small ε. Then $\varphi^X_{-\tau}(\mathcal{T}(y)) = \Gamma g c_u b_s$ implies that $\mathcal{T}(z) \in \mathcal{P}_\varepsilon(x)$ for $z = \varphi^X_\tau(y)$ and we can apply Theorem 9 to obtain a partner orbit for the original one.
(iii) According to [11], if the space $X = \Gamma \setminus \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ is compact (or equivalently, $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ is compact) and the crossing angle is small enough then the partner is unique.

REFERENCES

1. ALTLAND A., BRAUN P., HAAKE F., HEUSLER S., KNIEPER G. & MÜLLER S.: Near action-degenerate periodic-orbit bunches: A skeleton of chaos, in *Path Integrals. New Trends and Perspectives, Proc. 9th Int. Conference*, Eds. Janke and W. Pelster A., World Scientific, Singapore 2008
2. BEDFORD T., KEANE M. & SERIES C. (EDS.): *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces*, Oxford University Press, Oxford 1991

3. BERRY M.V.: Semiclassical theory of spectral rigidity, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **400**, 229-251 (1985)

4. EINSIEDLER M., LINDENSTRAUSS E., MICHEL PH. & VENKATESH A.: The distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces, *Duke Math. J.* **148**, 119-174 (2009)

5. EINSIEDLER M. & WARD T.: *Ergodic Theory With a View Towards Number Theory*, Springer, Berlin-New York 2011

6. HAAKE F.: *Quantum Signatures of Chaos*, 3rd edition, Springer, Berlin-New York 2010

7. HEUSLER H., MÜLLER S., ALTLAND A., BRAUN P. & HAAKE F.: Periodic orbit theory of level correlations, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 044103 (2007)

8. HEUSLER H., MÜLLER S., BRAUN P. & HAAKE F.: Universal spectral form factor for chaotic dynamics, *J. Phys. A* **37**, L31-L37 (2004)

9. HUYNH H.M.: *Partner Orbits and Action Differences on Compact Factors of the Hyperbolic Plane*, PhD thesis, Universität Köln 2014

10. HUYNH H.M.: Partner orbits and action differences on compact factors of the hyperbolic plane. II: Higher-order encounters, *Physica D* **314**, 35-53 (2016)

11. HUYNH H.M. & KUNZE M.: Partner orbits and action differences on compact factors of the hyperbolic plane. I: Sieber-Richter pairs, *Nonlinearity* **28**, 593-623 (2015)

12. KATOK A. & HASSELBLATT B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Sytems*, Cambridge University Press, Cambridge-New York 1995

13. MÜLLER S.: *Periodic-Orbit Approach to Universality in Quantum Chaos*, PhD thesis, Universität Duisburg-Essen 2005

14. MÜLLER S., HEUSLER S., BRAUN P., HAAKE F. & ALTLAND A.: Semiclassical foundation of universality in quantum chaos, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 014103 (2004)

15. MÜLLER S., HEUSLER S., BRAUN P., HAAKE F. & ALTLAND A.: Periodic-orbit theory of universality in quantum chaos, *Phys. Rev. E* **72**, 046207 (2005)

16. SIEBER M.: Semiclassical approach to spectral correlation functions, in *Hyperbolic Geometry and Applications in Quantum Chaos and Cosmology*, Eds. Bolte J. & Steiner F., London Math. Soc. LNS 397, Cambridge University Press, Cambridge-New York 2012, pp. 121-142

17. SIEBER M. & RICHTER K.: Correlations between periodic orbits and their rôle in spectral statistics, *Physica Scripta* **T90**, 128-133 (2001)

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.17-34

A FAMILY OF MODULES WITH SPECHT FILTRATION FOR q-BRAUER ALGEBRAS

NGUYỄN TIẾN DŨNG
Vinh University, Faculty of Education, 182 Le Duan, Vinh city, Vietnam
Email: dungnt@vinhuni.edu.vn

ABSTRACT

In this paper we introduce a family of modules for the q-Brauer algebra, which is induced by Permutation modules of the Iwahori-Hecke algebra. These modules admit a Specht filtration with independent multiplicities as those of permutation modules of the Iwahori-Hecke algebra.

Keywords: Specht filtration, Permutation module

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một họ các mô đun cho đại số q-Brauer. Những mô đun này được xây dựng dựa trên họ các mô đun hoán vị của đại số con Iwahori-Hecke, và có một dãy lọc Specht với các hệ số lọc độc lập tương tự như các hệ số đó trong dãy lọc Specht của các mô đun hoán vị.

1 Introduction

A well-known result for the algebra of symmetric group and its deformation, the Iwahori-Hecke algebra, is that over an arbitrary field their permutation modules have Specht module filtrations with independent multiplicities. However, for any module with Specht filtration this in general is not true. That is, the multiplicities of filtration are not well-defined, for instance see ([8], p126). In 2003 Hemmer and Nakano [7] proved a surprising result that in the case of F having characteristic different from two and three, the multiplicities of a Specht filtration of a module of the symmetric group algebra or the Iwahori-Hecke are well defined. Afterwards, by using of stratifying systems Hartman and Paget [6] obtained the same results for classical Brauer algebras-with a similar set of cases to be excepted like those for the symmetric group algebra. Since the q-Brauer algebra, see [2, 11], is a q-deformation of the classical Brauer algebra and contains the Iwahori Hecke as a subalgebra, it is natural to ask that such results hold true for the q-Brauer algebra. That is, the multiplicities of a Specht filtration of a module of the q-Brauer are also well-defined. So far, this claim has been not proved yet, but we are going to show an evidence for this via constructing a family of modules with Specht filtrations that have well-defined multiplicities.

Ngày nhận bài: 12/8/2015 ; ngày nhận đăng: 3/5/2016

2 Preliminaries

2.1 Combinatorics and Tableaux

Throughout, n will denote a positive integer and S_n will be the symmetric group acting on $\{1,\dots,n\}$ on the right. For i an integer, $1 \le i < n$, let s_i denote the transposition $(i, i+1)$. Then S_n is generated by $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$, which satisfy the defining relations

$$\begin{aligned} &s_i^2 = 1 && \text{for } 1 \le i < n;\\ &s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{for } 1 \le i < n-1;\\ &s_i s_j = s_j s_i && \text{for } 2 \le |i-j|. \end{aligned}$$

An expression $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ in which m is minimal is called a *reduced expression* for w, and $\ell(w) = m$ is the *length* of w. Let

$$s_{l,m} = \begin{cases} s_l s_{l+1} \dots s_m & \text{if } l \le m;\\ s_l s_{l-1} \dots s_m & \text{if } l > m. \end{cases}$$

Let k be an integer, $0 \le k \le [n/2]$. If $n-2k > 0$, a *composition* of $n-2k$ is a sequence $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ of non-negative integers such that $|\lambda| = \sum_{i=1} \lambda_i = n-2k$. The integers λ_i, for $i \ge 1$, are the parts of λ; if $\lambda_i = 0$ for $i > m$ we identify λ with $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$. A composition λ is a *partition* of $n-2k$ if $\lambda_i \ge \lambda_{i+1}$ for all $i \ge 1$. Otherwise, if $n-2k = 0$, write $\lambda = \varnothing$ for the empty composition (partition). The fact that λ is a composition (resp. partition) of $n-2k$ will be denoted by $\lambda \vDash n-2k$ (resp. $\lambda \vdash n-2k$), respectively. The *diagram* of a composition λ is the subset

$$[\lambda] = \{(i,j) \,:\, \lambda_i \ge j \ge 1 \text{and} i \ge 1\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

If λ is a partition of $n-2k$, then the diagram $[\lambda]$ is well known as the *Young diagram*. The elements of $[\lambda]$ are the *nodes* of λ and more generally a node is a pair $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. The diagram $[\lambda]$ is traditionally represented as an array of boxes with λ_i boxes on the i–th row. For example, if $\lambda = (2,4)$, then $[\lambda] = 1(2,4)$. Let $[\lambda]$ be the diagram of a composition. A node (i,j) is an *addable* node of $[\lambda]$ if $(i,j) \notin [\lambda]$ and $[\mu] = [\lambda] \cup \{(i,j)\}$ is the diagram of a composition; in this case (i,j) is also referred to as a *removable* node of $[\mu]$. Let k be an integer, $0 \le k \le [n/2]$, and λ be a composition of $n-2k$. A λ–tableau labeled by $\{2k+1, 2k+2, \dots, n\}$ is a bijection t from the nodes of the diagram $[\lambda]$ to the integers $\{2k+1, 2k+2, \dots, n\}$. A given λ–tableau $\mathrm{t} : [\lambda] \to \{2k+1, 2k+2, \dots, n\}$ can be visualized by labeling the nodes of the diagram $[\lambda]$ with the integers $2k+1, 2k+2, \dots, n$. For example, if $n = 10$, $k = 2$ and $\lambda = (3,2,1)$,

$$\mathrm{t} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 8 & 10 \\ \hline 6 & 7 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{20}$$

represents a λ–tableau. A λ–tableau $\mathfrak{t}$ labeled by $\{2k+1, 2k+2, \ldots, n\}$ is said to be *row standard* if the entries in $\mathfrak{t}$ increase from left to right in each row; $\mathfrak{t}$ is called *standard* if (i) λ is a partition, and (ii) $\mathfrak{t}(i_1, j_1) \geq \mathfrak{t}(i_2, j_2)$, whenever $i_1 \geq i_2$ and $j_1 \geq j_2$. If λ is a partition of $n-2k$, write $\mathrm{Std}_n(\lambda)$ for the set of standard λ–tableaux labeled by the integers $\{2k+1, 2k+2, \ldots, n\}$. If λ is a composition of $n-2k$, we let $\mathfrak{t}^\lambda$ denote the λ-tableau in which $2k+1, 2k+2, \ldots, n$ are entered in increasing order from left to right along the rows of $[\lambda]$. For instance, let $n = 10$, $k = 2$ and $\lambda = (3, 1, 2)$,

$$\mathfrak{t}^\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & & \\ \hline 9 & 10 & \\ \hline \end{array}.$$

If λ is a partition of $n - 2k$, then the tableau $\mathfrak{t}^\lambda$ is referred to as the *superstandard tableau* in $\mathrm{Std}_n(\lambda)$. If $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda)$, we will write $\lambda = \mathrm{Shape}(\mathfrak{t})$ and, abiding by the convention used in the literature, $\mathrm{Std}(\lambda)$ will be used to denote the set of standard tableaux $\mathfrak{t} : [\lambda] \to \{1, 2, \ldots, |\lambda|\}$; we will refer to elements of $\mathrm{Std}(\lambda)$ simply as standard λ–tableaux. If $\mathfrak{s} \in \mathrm{Std}_n(\lambda)$, we will write $\hat{\mathfrak{s}}$ for the tableau in $\mathrm{Std}(\lambda)$ which is obtained by relabeling the nodes of $\mathfrak{s}$ by the map $i \mapsto i - 2k$.

For our purposes, we maintain the *dominance order* on partitions as in J. Enyang (see [4]) which is defined as follows: if λ and μ are partitions, then $\lambda \trianglerighteq \mu$ if either

1. $|\mu| > |\lambda|$ or

2. $|\mu| = |\lambda|$ and $\sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \sum_{i=1}^m \mu_i$ for all $m > 0$.

We will write $\lambda \triangleright \mu$ to mean that $\lambda \trianglerighteq \mu$ and $\lambda \neq \mu$.

If $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda)$ and i is an integer $2k < i \leq n$, define $\mathfrak{t}|_i$ to be the tableau obtained by deleting each entry f of $\mathfrak{t}$ with $f > i$. The set $\mathrm{Std}_n(\lambda)$ admits an order $\trianglerighteq$ wherein $\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ if $\mathrm{Shape}(\mathfrak{s}|_i) \trianglerighteq \mathrm{Shape}(\mathfrak{t}|_i)$ for each integer i with $2k < i \leq n$. We adopt the usual convention of writing $\mathfrak{s} \triangleright \mathfrak{t}$ to mean that $\mathfrak{s} \trianglerighteq \mathfrak{t}$ and $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{t}$.

The subgroup $S_{2k+1,n} = \langle s_i : 2k < i < n \rangle \subset S_n$ acts on the set of λ–tableaux on the right in the usual manner, by permuting the integer labels of the nodes of $[\lambda]$. For example,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 8 & 9 & \\ \hline 10 & & \\ \hline \end{array}\ (6,8)(7,10,9) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 8 & 10 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline 9 & & \\ \hline \end{array}. \tag{21}$$

Let λ be a partition of $n - 2k$, define *Young subgroup* S_λ the row stabilizer of $\mathfrak{t}^\lambda$ in $S_{2k+1,n}$. For instance, when $n = 10$, $k = 2$ and $\lambda = (3, 2, 1)$, then a direct calculation yields $S_\lambda = \langle s_5, s_6, s_8 \rangle$. To each λ–tableau $\mathfrak{t}$, associate a unique permutation $d(\mathfrak{t}) \in S_{2k+1,n}$ by the condition $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^\lambda d(\mathfrak{t})$. If we refer to the tableau $\mathfrak{t}$ in (20) above, then $d(\mathfrak{t}) = (6, 8)(7, 10, 9)$ by (21).

2.2 The Iwahori–Hecke algebra of the symmetric group

Let R denote an integral domain and q be a unit in R. The Iwahori–Hecke algebra (over R) of the symmetric group is the unital associative R–algebra $\mathcal{H}_n(q^2)$ with generators $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, which satisfy the defining relations

$$\begin{aligned} &g_i^2 = (q^2-1)g_i + q^2 && \text{for } 1 \le i < n; \\ &g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} && \text{for } 1 \le i < n-1; \\ &g_i g_j = g_j g_i && \text{for } 2 \le |i-j|. \end{aligned}$$

If $w \in \mathfrak{S}_n$ and $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ is a reduced expression for w, then

$$g_w = g_{i_1} g_{i_2} \cdots g_{i_m}$$

is a well defined element of $\mathcal{H}_n(q^2)$ and the set $\{g_w : w \in S_n\}$ freely generates $\mathcal{H}_n(q^2)$ as an R–module (Theorems 1.8 and 1.13 of [9]). For a convenience later on, let

$$g^+_{l,m} = \begin{cases} g_l g_{l+1} \dots g_m & \text{if } l \le m; \\ g_l g_{l-1} \dots g_m & \text{if } l > m, \end{cases}$$

and

$$g^-_{l,m} = \begin{cases} g_l^{-1} g_{l+1}^{-1} \dots g_m^{-1} & \text{if } l \le m; \\ g_l^{-1} g_{l-1}^{-1} \dots g_m^{-1} & \text{if } l > m, \end{cases}$$

for $1 \le l, m \le n$.

Below we collect standard facts from the representation theory of the Iwahori–Hecke algebra of the symmetric group, of which details can be found in [9] or [10]. If μ is a composition of n, define the element

$$c_\mu = \sum_{\sigma \in S_\mu} g_\sigma. \tag{22}$$

In this section, let $*$ denote the algebra involution of $\mathcal{H}_n(q^2)$ mapping $g_w \mapsto g_{w^{-1}}$ for all $\omega \in S_n$. If λ is a partition of n, $\check{\mathcal{H}}_n^\lambda$ is defined to be the two–sided ideal in $\mathcal{H}_n(q^2)$ generated by

$$\left\{ c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = g^*_{d(\mathfrak{s})} c_\mu g_{d(\mathfrak{t})} : \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\mu), \text{ where } \mu \rhd \lambda \right\}.$$

The next statement is due to E. Murphy in [10].

Theorem 1. *The Iwahori–Hecke algebra $\mathcal{H}_n(q^2)$ is free as an R–module with basis*

$$\mathcal{M} = \left\{ c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = g^*_{d(\mathfrak{s})} c_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{for } \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda) \text{ and} \\ \lambda \text{ a partition of } n \end{array} \right\}. \tag{23}$$

Moreover, the following statements hold.

1. *The R–linear involution $*$ satisfies $* : c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \mapsto c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}$ for all $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda)$.*

2. *Suppose that $h \in \mathcal{H}_n(q^2)$, and that $\mathfrak{s}$ is a standard λ–tableau. Then there exist $a_{\mathfrak{t}} \in R$, for $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda)$, such that for all $\mathfrak{s} \in \mathrm{Std}(\lambda)$,*

$$c_{\mathfrak{s}\mathfrak{v}} h \equiv \sum_{\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda)} a_{\mathfrak{t}} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \mod \check{\mathcal{H}}_n^{\lambda}. \tag{24}$$

The basis $\mathcal{M}$ is cellular in the sense of [5]. If λ is a partition of n, the cell (or Specht) module S^{λ} for $\mathcal{H}_n(q^2)$ is the R–module freely generated by

$$\{c_{\mathfrak{s}} = c_{\lambda} g_{d(\mathfrak{s})} + \check{\mathcal{H}}_n^{\lambda} \, : \, \mathfrak{s} \in \mathrm{Std}(\lambda)\}, \tag{25}$$

and given the right $\mathcal{H}_n(q^2)$–action

$$c_{\mathfrak{s}} h = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda)} a_{\mathfrak{t}} c_{\mathfrak{t}}, \qquad \text{for } h \in \mathcal{H}_n(q^2), \tag{26}$$

where the coefficients $a_{\mathfrak{t}} \in R$, for $\mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda)$, are determined by the expression (24). The basis (25) is referred to as the Murphy basis for S^{λ} and $\mathcal{M}$ is the Murphy basis for $\mathcal{H}_n(q^2)$. Notice that the $\mathcal{H}_n(q^2)$–module S^{λ} is the contragradient dual of the Specht module defined in [1].
Let λ and μ be compositions of n. A λ–tableau of type μ is a map $\mathsf{T} : [\lambda] \to \{1, 2, \ldots, m\}$ such that $\mu_i = |\{y \in [\lambda] \, : \, \mathsf{T}(y) = i\}|$ for $i \geq 1$. A λ–tableau T of type μ is said to be *row semistandard* if the entries in each row of T is non-decreasing. A λ–tableau T of type μ is said to be *semistandard* if (i) λ is a partition, and (ii) T is a row semistandard and the entries in each column of T are strictly increasing. Let T^{μ} be the tableau of type μ such that $\mathsf{T}^{\mu}(i,j) = i$ for $(i,j) \in [\mu]$. If μ is a partition of n, then T^{μ} is the unique semistandard μ-tableau of type μ.

Example 2. *Let $\mu = (3, 2, 1)$. Then the semistandard tableaux of type μ are $\mathsf{T}^{\mu} = \begin{smallmatrix} 1&1&1 \\ 2&2 \\ 3 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1&2 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&3 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1&2 \\ 2&3 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1&3 \\ 2&2 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1&2&2 \\ 3 \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} 1&1&1&2&3 \\ 2 \end{smallmatrix}$, and $\begin{smallmatrix} 1&1&1&2&2&3 \end{smallmatrix}$, as in Example 4.1 of [9]. All the semistandard tableaux of type μ are obtainable from T^{μ} by "moving nodes up" in T^{μ}.*

If λ is a partition of n and μ is a composition of n, then the set of semistandard λ–tableaux of type μ will be denoted by $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu)$. Further, given a λ–tableau $\mathfrak{t}$ and a composition μ of n, then $\mu(\mathfrak{t})$ is defined to be the λ–tableau of type μ obtained from $\mathfrak{t}$ by replacing each entry i in $\mathfrak{t}$ with k if i appears in the k–th row of the tableau $\mathfrak{t}^{\mu}$.

Example 3. Let $n = 7$, and $\mu = (3, 2, 1, 1)$, so that $\mathfrak{t}^{\mu} = \begin{smallmatrix} 1&2&3 \\ 4&5 \\ 6 \\ 7 \end{smallmatrix}$. If $\lambda = (4, 3)$ and $\mathfrak{t} = \begin{smallmatrix} 1&2&3&7 \\ 4&5&6 \end{smallmatrix}$, then $\mu(\mathfrak{t}) = \begin{smallmatrix} 1&1&1&4 \\ 2&2&3 \end{smallmatrix}$.

Let λ be a partition of n and μ be a composition of n. Let S is a semistandard λ–tableau of type μ, and t is a standard λ–tableau, define in $\mathcal{H}_n(q^2)$ the element

$$c_{\mathsf{S}\mathfrak{t}} = \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in\mathrm{Std}(\lambda)\\ \mu(\mathfrak{s})=\mathsf{S}}} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}. \tag{27}$$

Given a composition μ of n, let M^μ be the right $\mathcal{H}_n(q^2)$–module generated by c_μ. The next statements, which are due to R. Dipper and G. James, and E. Murphy (Corollary 3.4 and Theorem 4.9 of [9]) respectively, are necessary for Section 3.

Lemma 4. *Let μ be a composition of n. Then M^μ is a free R-module with basis*

$$\{\ c_\mu g_{d(\mathfrak{t})} |\ \mathfrak{t} \textit{ a row standard } \mu \textit{ - tableau } \}.$$

Theorem 5. *Let μ be a composition of n. Then the collection*

$$\{c_{\mathsf{S}\mathfrak{t}} : \mathsf{S} \in \mathcal{T}_0(\lambda,\mu), \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}(\lambda), \textit{ for } \lambda \textit{ a partition of } n\}$$

freely generates M^μ as an R–module.

3 The q-Brauer algebra

In the section we recall some facts about the q- Brauer algebra that are necessary for the work. For more details can be found in [2, 3, 11]. From now on, we abbreviate the Hecke algebra of the symmetric group H_n replacing $\mathcal{H}_n(q^2)$. The q-Brauer algebra is defined combinatorially as follows:

Definition 6. Let r and q be invertible elements over the ring $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, r^{\pm 1}, (\dfrac{r-r^{-1}}{q-q^{-1}})^{\pm 1}]$. Moreover, if $q = 1$, then assume that $r = q^N$ with $N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. The q-Brauer algebra $Br_n(r^2, q^2)$ over R is the algebra defined via generators g_1, g_2, g_3, ..., g_{n-1} and e and defining relations:

(H) The elements g_1, g_2, g_3, ..., g_{n-1} satisfy the relations of the Hecke algebra H_n;

(E_1) $e^2 = \dfrac{r-r^{-1}}{q-q^{-1}}e$;

(E_2) $eg_i = g_ie$ for $i > 2$, $eg_1 = g_1e = q^2e$, $eg_2e = rqe$ and $eg_2^{-1}e = (rq)^{-1}e$;

(E_3) $g_2g_3g_1^{-1}g_2^{-1}e_{(2)} = e_{(2)}g_2g_3g_1^{-1}g_2^{-1}$, where $e_{(2)} = e(g_2g_3g_1^{-1}g_2^{-1})e$.

If $w \in S_n$ is a permutation and $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m}$ is a reduced expression for w, then

$$g_w = g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_m}$$

is a well defined element in $Br_n(r^2, q^2)$. Let k be an integer, $1 \leq k \leq [n \setminus 2]$, the elements $e_{(k)}$ in $Br_n(r^2, q^2)$ are defined inductively by $e_{(1)} = e$ and by

$$e_{(k+1)} = eg^{+}_{2,2k+1}g^{-}_{1,2k}e_{(k)}. \tag{28}$$

The map $* : Br_n(r^2, q^2) \to Br_n(r^2, q^2)$ determined by $(e_{(k)})^* = e_{(k)}$ and $(g_\omega)^* = g_{\omega^{-1}}$ for all $\omega \in S_n$ is an R-linear involution on the q-Brauer algebra, see Proposition 3.12 [2]. For k is an integer, $0 \leq k \leq [n/2]$, then

$$J_n(k) = \sum_{j=k}^{[n/2]} H_n e_{(j)} H_n \tag{29}$$

is the two sided ideal of $Br_n(r^2, q^2)$ generated by the element $e_{(k)}$. These $J_n(k)$ define a chain of two-sided ideals in $Br_n(r^2, q^2)$, that is, a filtration of $Br_n(r^2, q^2)$ by $Br_n(r^2, q^2) - Br_n(r^2, q^2)$ bimodules. This filtration has already appeared in our past work, for example see [2].

$$(0) \subseteq J_n([n/2]) \subseteq J_n([n/2]-1) \subseteq \cdots \subseteq J_n(1) \subseteq J_n(0) = Br_n(r^2, q^2). \tag{30}$$

The q-Brauer algebra has a basis labelled by diagrams of the Brauer algebra. In detail, for d is a diagram of the Brauer algebra each basis element of the q-Brauer algebra of the form $g_d = g_u e_{(k)} g_\omega g_v$ where (u, ω, v) is a reduced expression of d (see [2], section 3.2 for more details). Elements v in the above formula are in the set

$$B_{k,n} = \{v \in B_k |\ h = e_{(k)}v \text{ and } \ell(h) = \ell(v),\ h \in \mathcal{D}_{k,n}\}, \tag{31}$$

where $\mathcal{D}_{k,n}$ is the set of all diagrams h which have exactly k horizontal edges on each row, horizontal edges in their top row are arranged disjoint from the left to the right, and there is no crossing between any two vertical edges. For B_k see [2], Remark 2.1.

Notice that there are several different versions for the q-Brauer algebra depended on various research purposes (see [2, 3, 11, 12, 13]). In this article we work on the one defined in [12], which was then used in [3] to construct a cellular basis for the q-Brauer algebra. The reason for this choice is going to be clearly in the next section.

The statement below is a special case of Proposition 4.12 [2].

Lemma 7. *Let k be an integer, $0 < k \leq [n/2]$. If $b \in Br_n(r^2, q^2)$, $u \in B_{k,n}$, then there exist $a_{(\omega,v)} \in R$, for $\omega \in S_{2k+1,n}$ and $v \in B_{k,n}$, such that*

$$e_{(k)} g_u b \equiv \sum_{\substack{\omega \in S_{2k+1,n} \\ v \in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} e_{(k)} g_\omega g_v \mod J_n(k+1).$$

Let k be an integer, $0 \leq k \leq [n/2]$, and μ is a composition of $n - 2k$, define the element

$$x_\mu = \sum_{\sigma \in S_\mu} g_\sigma, \tag{32}$$

where S_μ is row stabilizer in the subgroup $S_{2k+1,n}$ of the μ-tableau $\mathfrak{t}^\mu$ as defined in Section 2. We define

$$m_\mu = e_{(k)} x_\mu = x_\mu e_{(k)} \tag{33}$$

which is the analogue to the element c_μ (see (22)) in the Iwahori-Hecke algebra.

If λ is a partition of $n-2k$ we denote

$$\Lambda_n = \{(k,\lambda) \mid \text{for all } 0 \le k \le [n/2], \text{ and } \lambda \text{ is a partition of } n-2k\}.$$

and $\mathcal{I}_n(k,\lambda)$ is the set of ordered pairs

$$\mathcal{I}_n(k,\lambda) = \mathrm{Std}_n(\lambda) \times B_{k,n} = \{(\mathfrak{s},u) : \mathfrak{s} \in \mathrm{Std}_n(\lambda) \text{ and } u \in B_{k,n}\}. \tag{34}$$

The R-vector space $\breve{Br}_n^\lambda$ with spanning set

$$\left\{ x^\nu_{(\mathfrak{s},u)(\mathfrak{t},v)} := g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\nu g_{d(\mathfrak{t})} g_v \;\middle|\; \begin{array}{c} (\mathfrak{s},u),(\mathfrak{t},v) \in \mathcal{I}_n(l,\nu) \\ \nu \rhd \lambda \text{ for } (l,\nu),(k,\lambda) \in \Lambda_n \end{array} \right\}. \tag{35}$$

is a two-sided ideal in $Br_n(r^2,q^2)$. Moreover, $J_n(k+1) \subseteq \breve{Br}_n^\lambda$ by Lemma 2 [3].

Theorem 8. *[3] The algebra $Br_n(r^2,q^2)$ is freely generated as an R–module by the collection*

$$\left\{ g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} g_v \;\middle|\; \begin{array}{c} (\mathfrak{s},u),(\mathfrak{t},v) \in \mathcal{I}_n(k,\lambda), \textit{for } \lambda \textit{ a partition} \\ \textit{of } n-2k, \textit{ and } 0 \le k \le [n/2] \end{array} \right\}. \tag{36}$$

Moreover, the following statements hold.

1. *The involution $*$ satisfies*

$$g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} g_v \mapsto g_v^* g_{d(\mathfrak{t})}^* m_\lambda g_{d(\mathfrak{s})} g_u$$

for all $(\mathfrak{t},v),(\mathfrak{s},u) \in \mathcal{I}_n(k,\lambda)$.

2. *Suppose that $b \in Br_n(r^2,q^2)$ and let k be an integer, $0 \le k \le [n/2]$. If λ is a partition of $n-2k$ and $(\mathfrak{s},u),(\mathfrak{t},v) \in \mathcal{I}_n(k,\lambda)$, then*

$$g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} g_v b \equiv \sum_{(\mathfrak{t}',v')} a_{(\mathfrak{t}',v')} g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\lambda g_{d(\mathfrak{t}')} g_{v'} \mod \breve{Br}_n^\lambda, \tag{37}$$

where $a_{(\mathfrak{t}',v')} \in R$, $(\mathfrak{t}',v') \in \mathcal{I}_n(k,\lambda)$, for all $(\mathfrak{t},v) \in \mathcal{I}_n(k,\lambda)$.

As a consequence of the above theorem, $\breve{Br}_n^{\lambda}$ is the R–module freely generated by the collection

$$\left\{g_u^* g_{d(\mathfrak{s})}^* m_\nu g_{d(\mathfrak{t})} g_v : (\mathfrak{t}, v), (\mathfrak{s}, u) \in \mathcal{I}_n(l, \nu), \text{ for } \nu \rhd \lambda)\right\}.$$

Cell modules (or Specht modules) $C_n^\lambda(k)$ in the q-Brauer algebra are defined to be R–modules freely generated by

$$\left\{m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} g_v + \breve{Br}_n^{\lambda} \,|\, (\mathfrak{t}, v) \in \mathcal{I}_n(k, \lambda)\right\} \tag{38}$$

and given the right $Br_n(r^2, q^2)$ action

$$m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} g_v b + \breve{Br}_n^{\lambda} = \sum_{(\mathfrak{t}', v')} a_{(\mathfrak{t}', v')} m_\lambda g_{d(\mathfrak{t}')} g_{v'} + \breve{Br}_n^{\lambda} \qquad \text{for } b \in Br_n(r^2, q^2),$$

where the coefficients $a_{(\mathfrak{t}', v')} \in R$ with $(\mathfrak{t}', v')$ in $\mathcal{I}_n(k, \lambda)$ are determined by the expression (37). The following example illustrates a basis for Specht module.

Example 9. Let $n = 5$, $k = 1$, and $\lambda = (2, 1)$. If j, i_j are integers with $1 \le i_j \le j \le n-1$, write $t_j = \mathbf{1}$ or $t_j = s_j s_{j-1} \cdots s_{i_j}$, so that using the algorithm shown in Section 3.3 [2] we get

$$\begin{aligned} B_{2,5} &= \{v = t_2 t_4 |\, t_j = \mathbf{1} \text{ or } t_j = s_{j,i_j},\ 1 \le i_j \le j \text{ for } j \in \{2, 4\}\} \\ &= \{\mathbf{1},\ s_2,\ s_4,\ s_{2,1},\ s_{4,3},\ s_2 s_4,\ s_{2,1} s_4,\ s_{4,2},\ s_2 s_{4,3},\ s_{2,1} s_{4,3},\ s_2 s_{4,2},\ s_{4,1},\ s_2 s_{4,1},\ s_{2,1} s_{4,2},\ s_{2,1} s_{4,1}\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} B_{1,5} &= \{v = t_2 t_3 t_4 |\, t_j = \mathbf{1} \text{ or } t_j = s_{j,i_j},\ 1 \le i_j \le j \le 4 \text{ for } j \in \{2, 3, 4\}\} \\ &= \{\mathbf{1},\ s_2,\ s_{2,3},\ s_{2,1},\ s_{2,1} s_3,\ s_{2,1} s_{3,2},\ s_{2,4},\ s_{2,1} s_{3,4},\ s_{2,1} s_{3,2} s_4,\ s_{2,1} s_{3,2} s_{4,3}\}. \end{aligned}$$

Since the set of partitions $\{\nu \,|\nu \rhd \lambda\} = \{\nu_1 = (3),\ \mu_2 = (1)\}$, we obtain as follows:
With $\nu_1 = (3)$ an simple calculation yields that the Young subgroup $S_{\nu_1} = \{\mathbf{1}, s_3, s_4, s_3 s_4, s_4 s_3, s_4 s_3 s_4\}$ and the set of all standard tableau $Std(\nu_1) = \{\ \mathfrak{t}^{\nu_1} = \boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\ \}$. Hence

$$m_{\nu_1} = e(\mathbf{1} + g_3 + g_4 + g_3 g_4 + g_4 g_3 + g_3 g_4 g_3) = e(\mathbf{1} + g_3)(\mathbf{1} + g_4 + g_4 g_3).$$

With $\nu_2 = (1)$we have the Young subgroup $S_{\nu_2} = \{\mathbf{1}\}$, $Std(\nu_2) = \{\ \mathfrak{t}^{\nu_2} = \boxed{5}\ \}$ and $m_{\nu_2} = e_{(2)}$. Now, by Equation (35) the two-sided ideal $\breve{Br}_5^{(2,1)}$ is freely generated as an R-module by the collection

$$\left\{\begin{matrix} x^{\nu_1}_{(\mathfrak{s}_1, u_1)(\mathfrak{t}_1, v_1)'} \\ x^{\nu_2}_{(\mathfrak{s}_2, u_2)(\mathfrak{t}_2, v_2)} \end{matrix}\middle|\ \begin{matrix} (\mathfrak{t}_1, v_1), (\mathfrak{s}_1, u_1) \in \mathcal{I}_5(1, (3)), \\ (\mathfrak{t}_2, v_2), (\mathfrak{s}_2, u_2) \in \mathcal{I}_5(2, (1)) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x^{\nu_1}_{(\mathbf{1}, u_1)(\mathbf{1}, v_1)'} \\ x^{\nu_2}_{(\mathbf{1}, u_2)(\mathbf{1}, v_2)} \end{matrix}\middle|\ \begin{matrix} v_1, u_1 \in B_{1,5} \\ v_2, u_2 \in B_{2,5} \end{matrix}\right\}. \tag{39}$$

In the other hand, we get

$$\mathrm{Std}(\lambda) = \left\{ \mathrm{t}^\lambda = \begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 5 & \end{smallmatrix}, \mathrm{t}^\lambda s_4 = \begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 4 & \end{smallmatrix} \right\}, \ S_\lambda = \{\mathbf{1}, s_3\} \text{ and } m_\lambda = e(\mathbf{1} + g_3).$$

The basis of the Specht module $C(1, \lambda)$, of the form displayed in (38), is

$$\{ \ x^\lambda_{(\mathrm{t},v)} = e(\mathbf{1} + g_3)g_{\mathrm{t}}g_v + \breve{B}r_5^{(2,1)} \ |\mathrm{t} \in \{\mathbf{1}, s_4\} \text{ and } v \in B_{1,5} \ \}, \text{ and } dim_R C(1, \lambda) = 20.$$

3.1 A Specht filtration of L^μ

In [7] Hemmer and Nakano proved that in the case $p \neq 2, 3$ then a module for Iwahori-Hecke algebra with a Specht module filtration has well-defined filtration multiplicities. Afterwards, Hartmann and Paget stated an similar result for Brauer algebras (see [6], Theorem 8). In this section, let μ be a composition of $n - 2k$ we are going to construct $Br_n(r^2, q^2)$-modules L^μ which admit a Specht module filtration with independent multiplicities. These modules are induced from permutation modules M^μ of the Iwahori-Hecke algebra. Notice that a $Br_n(r^2, q^2)$-module M has a filtration by Specht modules (or a Specht filtration) if there exists a sequence of submodules

$$M = M_1 > M_2 > \cdots > M_{f-1} > M_f = 0,$$

such that every subquotient M_i/M_{i+1} is isomorphic to a Specht module $C(k, \lambda)$ for $(k, \lambda) \in \Lambda_n$. The filtration multiplicity is defined to be the number of times a Specht module $C(k, \lambda)$ appears as a subquotient.

Lemma 10. *If k is an integer, $0 \leq k < [n/2]$, then there is a well defined R–algebra monomorphism $\vartheta_k : H_{n-2k} \to J_n(k)/J_n(k+1)$, determined by*

$$\vartheta_k : g_{\hat{v}} \to a^{-k} e_{(k)} g_v + J_n(k+1),$$

where $a = \dfrac{r - r^{-1}}{q - q^{-1}}$, $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_m}$ is a permutation in $S_{2k+1,n}$ and $\hat{v}$ is the permutation $\hat{v} = s_{i_1-2k} s_{i_2-2k} \cdots s_{i_m-2k} \in S_{n-2k}$. Additionally, the map ϑ_k satisfies the property

$$\vartheta_k(g_j g_{\hat{v}}) = g_{2k+j} \vartheta_k(g_{\hat{v}}), \qquad \text{whenever } 1 \leq j < n - 2k. \tag{40}$$

Proof. The R- algebra monomorphism property of ϑ_k can be checked directly by its definition. The equation (40) follows from the fact that

$$\begin{aligned} \vartheta_k(g_j g_{\hat{v}}) &= \vartheta_k(g_j)\vartheta_k(g_{\hat{v}}) = (a^{-k} e_{(k)} g_{j+2k})(a^{-k} e_{(k)} g_v) \\ &= a^{-2k} g_{j+2k} (e_{(k)})^2 g_v \overset{L1(2)[3]}{=} a^{-k} g_{2k+j} e_{(k)} g_{\hat{v}} = g_{2k+j} \vartheta_k(g_{\hat{v}}). \end{aligned}$$

□

Definition 11. For k is an integer, $0 \leq k \leq [n/2]$, and μ is a composition of $n-2k$, define L^μ to be the right $Br_n(r^2, q^2)$–submodule of $J_n(k)/J_n(k+1)$ generated by the element $m_\mu + J_n(k+1)$.

For λ a partition of $n-2k$, we define

$$m_{\mathsf{St}} = \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in \mathrm{Std}_n(\lambda) \\ \mu(\hat{\mathfrak{s}})=\mathsf{S}}} g^*_{d(\mathfrak{s})} m_\lambda g_{d(\mathfrak{t})} \qquad \text{for } \mathsf{S} \in \mathcal{T}_0(\lambda,\mu) \text{ and } \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda), \tag{41}$$

where $\hat{\mathfrak{s}}$ is a λ-standard tableaux in $\mathrm{Std}(\lambda)$ which is obtained by relabelling the nodes i in $\mathfrak{s}$ by $i-2k$.

Notice that the element m_{St} of the q-Brauer algebra defined above is an analogue as the element c_{St} (see (29)) of the Iwahori-Hecke algebra. The first main result is the following.

Theorem 12. *Let k be an integer, $0 \leq k \leq [n/2]$, and let μ be a composition of $n-2k$. Then L^μ is free as an R-module with basis*

$$\left\{ m_{\mathsf{St}} g_v + J_n(k+1) \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{for } \mathsf{S} \in \mathcal{T}_0(\lambda,\mu),\ \mathfrak{t} \in \mathrm{Std}_n(\lambda), \\ \lambda \vdash n-2k \text{ and } v \in B_{k,n} \end{array} \right\} \tag{42}$$

Proof. If $b \in Br_n(r^2, q^2)$ and $u \in B_{k,n}$, then by Lemma 7, there exist $a_{\omega,v} \in R$, for $\omega \in S_{2k+1,n}$ and $v \in B_{k,n}$ such that

$$e_{(k)} g_u b \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} e_{(k)} g_\omega g_v \mod J_n(k+1).$$

In the following, multiplying both sides of the last formula by x_μ on the left and using the property (40) we obtain

$$\begin{aligned} x_\mu e_{(k)} g_u b &\equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} x_\mu \big(e_{(k)} g_\omega\big) g_v \mod J_n(k+1) \\ &\overset{L10}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} a^k x_\mu \vartheta_k(g_{\hat{\omega}}) g_v \mod J_n(k+1) \\ &\overset{(32)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} a^k \Big(\sum_{\sigma\in S_\mu} g_\sigma\Big) \vartheta_k(g_{\hat{\omega}}) g_v \mod J_n(k+1) \\ &\overset{(40)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} a^k \vartheta_k\Big(\Big(\sum_{\sigma\in S_\mu} g_{\hat{\sigma}}\Big) g_{\hat{\omega}}\Big) g_v \mod J_n(k+1) \\ &\overset{(22)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n} \\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} a^k \vartheta_k(c_\mu g_{\hat{\omega}}) g_v \mod J_n(k+1). \end{aligned}$$

Using definition of M^μ and Theorem 5, $c_\mu g_{\hat{\omega}}$ can be rewritten as follow

$$c_\mu g_{\hat{\omega}} = \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} c_{\mathsf{S}\hat{\mathfrak{t}}}.$$

Hence,

$$\begin{aligned}
m_\mu g_u b &\equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} a^k \vartheta_k\Big(\sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} c_{\mathsf{S}\hat{\mathfrak{t}}}\Big) g_v \mod J_n(k+1)\\
&\equiv a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} \vartheta_k(c_{\mathsf{S}\hat{\mathfrak{t}}}) g_v \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(27)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} \vartheta_k\Big(\sum_{\substack{\hat{\mathfrak{s}}\in \mathrm{Std}(\lambda)\\ \mu(\hat{\mathfrak{s}})=\mathsf{S}}} c_{\hat{\mathfrak{s}}\hat{\mathfrak{t}}}\Big) g_v \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(23)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} \vartheta_k\Big(\sum_{\substack{\hat{\mathfrak{s}}\in \mathrm{Std}(\lambda)\\ \mu(\hat{\mathfrak{s}})=\mathsf{S}}} g^*_{d(\hat{\mathfrak{s}})} c_\lambda g_{d(\hat{\mathfrak{t}})}\Big) g_v \mod J_n(k+1)\\
&\overset{L10}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in \mathrm{Std}_n(\lambda)\\ \mu(\hat{\mathfrak{s}})=\mathsf{S}}} g^*_{d(\mathfrak{s})} e_{(k)} x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}\Big) g_v \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(41)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}} g_v \mod J_n(k+1).
\end{aligned}$$

Thus

$$m_\mu g_u b + J_n(k+1) = \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ v\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} \sum_{\substack{\mathsf{S}\in\mathcal{T}_0(\lambda,\mu)\\ \mathfrak{t}\in Std_n(\lambda)}} a_{(\mathsf{S},\mathfrak{t})} m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}} g_v + J_n(k+1). \tag{43}$$

This proves the spanning property of the set (42).
Now, we need to show that the element $m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}} g_v + J_n(k+1)$ in the set (42) lies in L^μ. Indeed, For $v \in B_{k,n}$, by Lemma 7 we get

$$e_{(k)} g_v \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,v)} e_{(k)} g_\omega g_u \mod J_n(k+1).$$

Multiplying both sides from the left of the equation by $g^*_{d(\mathfrak{s})} x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}$, where $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in Std_n(\lambda)$ and $\mu(\hat{s}) = \mathsf{S}$ for $\mathsf{S} \in \mathcal{T}_0(\lambda,\mu)$, we get

$$\begin{aligned}
\big(g^*_{d(\mathfrak{s})}x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}\big)e_{(k)}g_v &\equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\big(g^*_{d(\mathfrak{s})}x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}\big)e_{(k)}g_\omega g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{L10}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\big(g^*_{d(\mathfrak{s})}x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}\big)\vartheta_k(g_{\hat\omega})g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(40)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(g^*_{d(\hat{\mathfrak{s}})}c_\lambda g_{d(\hat{\mathfrak{t}})}g_{\hat\omega})g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(23)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(c_{\hat{\mathfrak{s}}\hat{\mathfrak{t}}}g_{\hat\omega})g_u \mod J_n(k+1).
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda)\\ \mu(\hat s)=\mathsf{S}}} \big(g^*_{d(\mathfrak{s})}x_\lambda g_{d(\mathfrak{t})}\big)e_{(k)}g_v &\equiv a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda)\\ \mu(\hat s)=\mathsf{S}}} \vartheta_k(c_{\hat{\mathfrak{s}}\hat{\mathfrak{t}}}g_{\hat\omega})g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(27)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(c_{\mathsf{S}\hat{\mathfrak{t}}}g_{\hat\omega})g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{L4}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k\Big(\sum_{\substack{\omega_1\in\text{row standard}\\ \mu-tableau}} c_\mu g_{d(\hat\omega_1)}\Big)g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{L10}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\omega_1\in\text{row standard}\\ \mu-tableau}} x_\mu e_{(k)}g_{d(\omega_1)}g_u \mod J_n(k+1)\\
&\overset{(33)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\omega_1\in\text{row standard}\\ \mu-tableau}} m_\mu g_{d(\omega_1)}g_u \mod J_n(k+1).
\end{aligned}$$

The last equation and (41) deduce that

$$m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}}g_v \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\omega_1\in\text{row standard}\\ \mu-tableau}} m_\mu g_{d(\omega_1)}g_u \mod J_n(k+1). \tag{44}$$

Thus, $m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}}g_v$ is in L^μ. Finally, we need to show that the set (42) is a linear independent set over R. By Definition (41), the elements $\{m_{\mathsf{S}\mathfrak{t}}g_v\}$ are linearly independent because they are sums over pairwise disjoint sets of basis elements in Theorem 8. □

A demonstration of this theorem is the following example.

Example 13. Let $n=4$, $k=1$ and $\mu=(1,1)$. Then $m_\mu=e$, $J_4(2)=<e_{(2)}>$, and the set $B_{1,4}$ is $\{\mathbf{1},\ s_2,\ s_2s_3,\ s_2s_1,\ s_2s_1s_3,\ s_2s_1s_3s_2\}$. By Theorem 3.13[2] the q-Brauer algebra $Br_4(r^2,q^2)$ has a basis

$$\left\{ g_u^* g_\pi e_{(m)} g_v \;\middle|\; \begin{array}{c} u,v \in B_{m,4},\, g_\pi \in H_{2m+1,4}, \\ 0 \le m \le 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} g_\omega,\, g_u^* e g_v\,, \\ g_u^* e g_3 g_v,\, e_{(2)} \end{array} \;\middle|\; u,v \in B_{1,4} \text{ and } \omega \in H_4 \right\}. \quad (45)$$

Using Definition in 11 and a direct calculation implies that the $Br_4(r^2, q^2)$-module L^μ has a spanning set

$$\left\{ m_\mu g_u^* g_\pi e_{(m)} g_v + J_4(2) \;\middle|\; \begin{array}{c} u,v \in B_{m,4},\, g_\pi \in H_{2m+1,4}, \\ 0 \le m \le 2 \end{array} \right\} = \{ e g_v + J_4(2),\ e g_3 g_v + J_4(2) |\ v \in B_{1,4} \}.$$

In the other word, for λ is a partition of 2, the set of all semistandard λ- tableau of type μ ordered is $\mathcal{T}_0(\lambda, \mu) = \{\ \mathcal{S}_1 = \begin{smallmatrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\end{smallmatrix}\,,\ \mathcal{S}_2 = \boxed{1}\boxed{2}\ \}$.

The elements $m_{\mathcal{S}_i \mathfrak{t}}$ with $\mathsf{S}_i \in \mathcal{T}_0(\lambda_i, \mu)$ and $\mathfrak{t} \in Std_4(\lambda_i)$ are determined as follows.

1. If $\lambda_1 = (1,1)$, then $S_{\lambda_1} = \{\mathbf{1}\},\ Std_4(\lambda_1) = \{\ \mathfrak{t}^{\lambda_1} = \begin{smallmatrix}\boxed{3}\\\boxed{4}\end{smallmatrix}\}$ and $\mathcal{T}_0(\lambda_1, \mu) = \{\ \mathcal{S}_1\}$. So,

$$m_{\mathcal{S}_1 \mathfrak{t}^{\lambda_1}} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathrm{Std}_4(\lambda_1) \\ \mu(\hat{\mathfrak{s}}) = \mathsf{S}_1}} g^*_{d(\mathfrak{s})} m_{\lambda_1} g_{d(\mathfrak{t})} = \mathbf{1} \cdot m_{\lambda_1} \cdot \mathbf{1} = e.$$

2. If $\lambda_2 = (2)$, then $S_{\lambda_2} = \{\mathbf{1}, s_3\}$ and hence $m_{\lambda_2} = e(1 + g_3)$. Computing directly yields $Std_4(\lambda_2) = \{\ \mathfrak{t}^{\lambda_2} = \boxed{3}\boxed{4}\ \}$ and $\mathcal{T}_0(\lambda_2, \mu) = \{\ \mathcal{S}_2\}$. Therefore

$$m_{\mathcal{S}_2 \mathfrak{t}^{\lambda_2}} = \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathrm{Std}_4(\lambda_2) \\ \mu(\hat{\mathfrak{s}}) = \mathsf{S}_2}} g^*_{d(\mathfrak{s})} m_{\lambda_2} g_{d(\mathfrak{t})} = \mathbf{1} \cdot m_{\lambda_2} \cdot \mathbf{1} = e(1 + g_3).$$

Observe that both $m_{\mathcal{S}_1 \mathfrak{t}^{\lambda_1}}$ and $m_{\mathcal{S}_2 \mathfrak{t}^{\lambda_2}}$ are linearly independent, and the set

$$\{\ m_{\mathcal{S}_1 \mathfrak{t}^{\lambda_1}} g_v + J_4(2),\ m_{\mathcal{S}_2 \mathfrak{t}^{\lambda_2}} g_v + J_4(2) \mid v \in B_{1,4}\ \}$$

generates the spanning set of L^μ.

Theorem 14. *Let k be an integer, $0 \le k \le [n/2]$, and let μ be a composition of $n - 2k$. Then as a $Br_n(r^2, q^2)$-module, L^μ has a filtration*

$$L^\mu = L_1 > L_2 > \cdots > L_f > L_{f+1} = 0$$

such that for $i = 1, 2, \cdots, f$ there exists a partition λ_i of $n - 2k$ with $L_i / L_{i+1} \cong C_n^{\lambda_i}(k)$. Moreover, for each partition λ_i the number of the composition factor $C_n^{\lambda_i}(k)$ which appears in the filtration is equal to the number of semistandard λ_i- tableaux of type μ.

Proof. Let $\{\mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \cdots, \mathsf{S}_f\}$ be the set of all semistandard λ_i- tableaux of type μ, ordered so that $\mathsf{S}_i \in \mathcal{T}_0(\lambda_i, \mu)$ and $i \ge j$ whenever $\lambda_i \trianglerighteq \lambda_j$. For $i = 1, \cdots, f$ let L_i be the R-submodule of L^μ

with basis

$$\left\{ m_{\mathsf{s}_j\mathfrak{t}} g_v + J_n(k+1) \,\middle|\, \begin{array}{c} i \le j \le f \text{ and } v \in B_{k,n}, \\ \mathfrak{t} \in Std_n(\lambda_j),\, \lambda_j \vdash n-2k \end{array} \right\}.$$

Then each L_i is a right $Br_n(r^2, q^2)$-module by Theorem 8. Therefore,

$$L^\mu = L_1 > L_2 > \cdots > L_f > L_{f+1} = 0$$

is a $Br_n(r^2, q^2)$-module filtration of L^μ. Consequently, we consider the R-module homomorphism $C_n^{\lambda_i}(k) \longrightarrow L_i/L_{i+1}$ defined, for $\mathfrak{t} \in Std_n(\lambda_i)$ and $v \in B_{k,n}$, by

$$m_{\lambda_i} g_{d(\mathfrak{t})} g_v + \breve{B}r_n^{\lambda_i} \mapsto m_{\mathsf{s}_i\mathfrak{t}} g_v + L_{i+1}.$$

Observe that the surjective property of the map follows from its definition, and both modules have the same rank. Therefore, the remainder of the proof is to show that the map is a $Br_n(r^2, q^2)$ - homomorphism. Using similar arguments which yields (43), for $v \in B_{k,n}$ and $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in Std_n(\lambda_i)$ such that $\mu(\hat{\mathfrak{s}}) = \mathcal{S}_i$ with $\mathcal{S}_i \in \mathcal{T}_0(\lambda_i, \mu)$, we obtain

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} g^*_{d(\mathfrak{s})} x_{\lambda_i} g_{d(\mathfrak{t})}\Big) e_{(k)} g_v b &\equiv \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} g^*_{d(\mathfrak{s})} x_{\lambda_i} g_{d(\mathfrak{t})}\Big)\Big(\sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} e_{(k)} g_\omega g_u\Big) \mod J_n(k+1) \\
&\overset{L10}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}\Big) \vartheta_k(g_{\hat{\omega}}) g_u \mod J_n(k+1) \\
&\overset{(40)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} \vartheta_k\big(c_{\hat{\mathfrak{s}}\hat{\mathfrak{t}}} g_{\hat{\omega}}\big) g_u \mod J_n(k+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(24)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} \vartheta_k\Big(\sum_{\mathfrak{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathfrak{t}_1} c_{\hat{\mathfrak{s}}\hat{\mathfrak{t}}_1} + \hat{h}\Big) g_u \mod J_n(k+1) \\
&\overset{L10}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathfrak{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathfrak{t}_1} \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} e_{(k)} c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}_1}\Big) g_u \\
&\qquad + a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} \vartheta_k(\hat{h}) g_u \mod J_n(k+1) \\
&\overset{41}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathfrak{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathfrak{t}_1} m_{\mathsf{s}_i\mathfrak{t}_1} g_u \\
&\qquad + a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in Std_n(\lambda_i)\\ \mu(\hat{s})=\mathsf{S}_i}} \vartheta_k(\hat{h}) g_u \mod J_n(k+1).
\end{aligned}$$

where $a_{t_1} \in R$ and $\hat{h} \in \check{\mathcal{H}}^{\lambda_i}_{n-2k}$. Lemma 10 implies that $\vartheta_k(\hat{h})g_u = a^{-k}e_{(k)}hg_u$ with $h \in \check{\mathcal{H}}^{\lambda_i}_{2k+1,n}$, and hence, $\vartheta_k(\hat{h})g_u \in L_{i+1}$. So, by Definition of L_i, the last equation can be rewritten

$$m_{\mathsf{S}_i\mathsf{t}}g_v b \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathsf{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathsf{t}_1} m_{\mathsf{S}_i\mathsf{t}_1}g_u \mod (L_{i+1}). \tag{46}$$

By the same calculation showing (44), for λ_i a partition of $n-2k$ and $\mathsf{t} \in Std_n(\lambda_i)$, there also exist the same coefficients $a_{(\omega,u)}, a_{\mathsf{t}_1} \in R$ as in (46) satisfying the following equation:

$$(x_{\lambda_i}g_{d(\mathsf{t})})e_{(k)}g_v b \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}x_{\lambda_i}g_{d(\mathsf{t})}e_{(k)}g_\omega g_u \mod J_n(k+1)$$

$$\overset{L10}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}c_{\mathsf{t}}\vartheta_k(g_{\hat{\omega}})g_u \mod J_n(k+1)$$

$$\overset{(40)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(c_{\hat{\mathsf{t}}}g_{\hat{\omega}})g_u \mod J_n(k+1)$$

$$\overset{(26)}{\equiv} a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k\Big(\sum_{\mathsf{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathsf{t}_1}c_{\hat{\mathsf{t}}_1} + \hat{h}\Big)g_u \mod J_n(k+1)$$

$$\overset{L10}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathsf{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathsf{t}_1}e_{(k)}c_{\mathsf{t}_1}g_u + a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(h)g_u \mod J_n(k+1)$$

$$\overset{(33)}{\equiv} \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathsf{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathsf{t}_1}m_{\lambda_i}g_{d(\mathsf{t}_1)}g_u + a^k \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)}\vartheta_k(h)g_u \mod J_n(k+1).$$

Since $J_n(k+1) \subsetneq \breve{Br}^{\lambda_i}_n$ and $\vartheta_k(\hat{h}) \in \breve{Br}^{\lambda_i}_n$. This implies that the equation is equivalent to

$$m_{\lambda_i}g_{d(\mathsf{t})}g_v b \equiv \sum_{\substack{\omega\in S_{2k+1,n}\\ u\in B_{k,n}}} a_{(\omega,u)} \sum_{\mathsf{t}_1\in Std_n(\lambda_i)} a_{\mathsf{t}_1}m_{\lambda_i}g_{\mathsf{t}_1}g_u \mod \breve{Br}^{\lambda_i}_n. \tag{47}$$

Thus, both (46) and (47) show that the above map is a $Br_n(r^2, q^2)$ - homomorphism. Then we get the precise result. □

The below example illustrates Theorem 14.

Example 15. Let $n = 5$, $k = 1$ and $\mu = (1,1,1)$. Then $m_\mu = e$ and the set $B_{1,5}$ is as that of (9). The set of all semistandard λ- tableau of type μ ordered is

$$\mathcal{T}_0(\lambda,\mu) = \Big\{\ \mathcal{S}_1 = \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline 2\\ \hline 3\\ \hline\end{array},\ \mathcal{S}_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array},\ \mathcal{S}_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array},\ \mathcal{S}_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline\end{array}\Big\}.$$

Subsequently, the elements $m_{\mathcal{S}_i\mathsf{t}}$ with $\mathsf{S}_i \in \mathcal{T}_0(\lambda_i,\mu)$ and $\mathsf{t} \in Std_n(\lambda_i)$ are determined as follows.

1. If $\lambda_1 = (1,1,1)$, then $S_{\lambda_1} = \{\mathbf{1}\}$, $Std_n(\lambda_1) = \{\ \mathfrak{t}^{\lambda_1} = \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 4\\\hline 5\\\hline\end{array}\ \}$ and $\mathcal{T}_0(\lambda_1,\mu) = \{\ \mathcal{S}_1\}$. So, $m_{\mathcal{S}_1\mathfrak{t}} = \sum_{\substack{\mathfrak{s}\in \mathrm{Std}_n(\lambda_1)\\ \mu(\hat{\mathfrak{s}})=\mathsf{S}_1}} g^*_{d(\mathfrak{s})} m_{\lambda_1} g_{d(\mathfrak{t})} = \mathbf{1}\cdot m_{\lambda_1}\cdot \mathbf{1} = e$.
2. If $\lambda_2 = (2,1)$, then $S_{\lambda_2} = \{\mathbf{1}, s_3\}$, $Std_n(\lambda_2) = \{\ \mathfrak{t}_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4\\\hline 5 \\\cline{1-1}\end{array}\ ,\ \mathfrak{t}_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 5\\\hline 4 \\\cline{1-1}\end{array}\ \}$ and $\mathcal{T}_0(\lambda_2,\mu) = \{\ \mathcal{S}_2,\ \mathcal{S}_3\}$. A direct calculation yields, $m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_2} = \mathbf{1}\cdot m_{\lambda_2}\cdot g_{d(\mathfrak{t}_2)} = e(1+g_3)$ and $m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_3} = \mathbf{1}\cdot m_{\lambda_2}\cdot g_{d(\mathfrak{t}_3)} = e(1+g_3)g_4$.
   Similarly, $m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_2} = g^*_{d(\mathfrak{s})}\cdot m_{\lambda_2}\cdot g_{d(\mathfrak{t}_2)} = g_4 e(1+g_3)$ with $s = \mathfrak{t}_3$ and
   $m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_3} = g^*_{d(\mathfrak{s})}\cdot m_{\lambda_3}\cdot g_{d(\mathfrak{t}_3)} = g_4 e(1+g_3)g_4$ with $s = \mathfrak{t}_3$.
3. If $\lambda_4 = (4)$, then $S_{\lambda_4} = \{\mathbf{1}, s_3, s_4, s_3s_4, s_4s_3, s_3s_4s_3\}$, $Std_n(\lambda_4) = \{\ \mathfrak{t}_4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3 & 4 & 5\\\hline\end{array}\ \}$ and $\mathcal{T}_0(\lambda_4,\mu) = \{\ \mathcal{S}_4\}$. Hence, $m_{\mathcal{S}_4\mathfrak{t}_4} = \mathbf{1}\cdot m_{\lambda_4}\cdot g_{d(\mathfrak{t}_4)} = m_{\lambda_4} = e(1+g_3)(1+g_4+g_4g_3)$.
   A direct check implies that $Br_5(r^2,q^2)$-module $L^{(1,1,1)}$ has the basis

$$\{\ m_{\mathcal{S}_1\mathfrak{t}}g_v + J_5(2),\ m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_2}g_v + J_5(2), m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_3}g_v + J_5(2),\ m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_2}g_v + J_5(2),$$
$$m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_3}g_v + J_5(2),\ m_{\mathcal{S}_4\mathfrak{t}_4}g_v + J_5(2) |\ v\in B_{1,5}\}.$$

   Moreover, $L^{(1,1,1)}$ has a Specht filtration of $Br_5(r^2,q^2)$-module

$$L^{(1,1,1)} = L_1 > L_2 > L_3 > L_4 > L_5 = 0,$$

   where $L_i = \{\ m_{\mathcal{S}_j\mathfrak{t}}g_v + J_5(2) \mid i \le j \le 4, \mathfrak{t}\in Std_5(\lambda_j)$ and $v\in B_{1,5}\}$ and $L_1/L_2 \cong C_5^{(3)}(1)$, $L_2/L_3 \cong L_3/L_4 \cong C_5^{(2,1)}(1)$, $L_4/L_5 \cong C_5^{(1,1,1)}(1)$.
   For an instance, using the example 9 we can see that there is a $Br_5(r^2,q^2)$-isomorphism from L_2/L_3 to $C_5^{(2,1)}(1)$ determined by $m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_2}g_v + L_3 \mapsto e(1+g_3)g_v + \check{Br}_5^{(2,1)}$ and $m_{\mathcal{S}_2\mathfrak{t}_3}g_v + L_3 \mapsto e(1+g_3)g_4g_v + \check{Br}_5^{(2,1)}$. Another one is from L_3/L_4 to $C_5^{(2,1)}(1)$ determined by $m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_2}g_v + L_4 \mapsto e(1+g_3)g_v + \check{Br}_5^{(2,1)}$ and $m_{\mathcal{S}_3\mathfrak{t}_3}g_v + L_4 \mapsto e(1+g_3)g_4g_v + \check{Br}_5^{(2,1)}$.

REFERENCES

1. Dipper, R. and James, G.D., Representation of Hecke algebras and general linear groups, Proc.London Math. Soc (3) 52, 20-52 (1986).
2. Dung, N.T., Cellular structure of q-Brauer algebras, Algebr. Represent. Theor (17) 05, 1359-1400 (2014).
3. Dung, N.T., A cellular basis of the q-Brauer algebra related with Murphy bases of Hecke algebras, arXiv:1302.42472v3.
4. Enyang, J., Specht modules and semisimplicity criteria for Brauer and Birman-Murakami-Wenzl algebras, J. Comb. Theory, Ser. A 26, 291-341 (2007).
5. Graham, J.J. and Lehrer, G. I, Cellular algebras, Invent. Math. 123, no. 1, 1-34 (1996).
6. Hartman R., Paget, R., Young modules and filtration multiplicities for Brauer algebras, Math. Z, 254, 333-357 (2006).
7. Hemmer, D. , Nakano, D., Specht filtration for Hecke algebras of type A, J. Lond. Math. Soc. 69(2), 623-638 (2004).

8. Martin, S., Schur algebras and representation theory, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
9. Mathas, A. *Iwahori-Hecke Algebras and Schur Algebras of the Symmetric Group*, volume 15 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, R.I., (1999).
10. Murphy, E., The representations of Hecke algebras of type A_n, J.Algebra 173(1), 97-121 (1995).
11. Wenzl, H., A q-Brauer algebra, J. Algebra 358, 102-127 (2012).
12. Wenzl, H., Quotients of representation rings, Represnet. Theory 15, 385-406 (2011).
13. Wenzl, H., Fusion symmetric spaces and subfactors, Pacific J. Math. **259**, no. 2, 483-510 (2012).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.35-45

SOME REMARKS ON THE STABILITY OF THE FUNCTIONAL EQUATION $\mathbf{f(g(x,y)) = F(f(x), f(y))}$

HOÀNG VĂN HÙNG

Institute of Basic Sciences - Vietnam Maritime University, 484 Lach Tray, Hai Phong.

Email: hunghvkhcb@vimaru.edu.vn

ABSTRACT

Let X, Y be a vector space and a Banach space, respectively. Using fixed point methods, we prove the stability of the solutions of the functional equation $f(g(x,y)) = F(f(x), f(y))$ where $F : Y \times Y \to Y$ is a Lipschitz map, $g : X \times X \to X$ is a homogeneous map with the property $g(x,x) = 2x$.

Keywords: Functional equation, Banach space, Generalized metric space, Lipschitz map, Homogeneous function, Fixed point, Generalized Hyers-Ulam stability.

TÓM TẮT

Cho X, Y tương ứng là các không gian véctơ và không gian Banach. Sử dụng phương pháp điểm bất động chúng tôi chứng minh sự ổn định của nghiệm của phương trình hàm $f(g(x,y)) = F(f(x), f(y))$, trong đó $F : Y \times Y \to Y$ là ánh xạ Lipschitz, $g : X \times X \to X$ là ánh xạ thuần nhất với tính chất $g(x,x) = 2x$.

1 Introduction and Preliminaries

The question concerning the stability of solutions of the functional equation $f(g(x,y)) = F(f(x), f(y))$ in Banach spaces was investigated by many mathematicians (see [1]-[3],[5]-[12]). The origin of the question is the problem raised by Ulam [13]: "Let G_1 be a group and let G_2 be a metric group with metric d. Given $\varepsilon > 0$, does there exist a $\delta > 0$ such that if a function $h : G_1 \to G_2$ satisfies the inequality $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$ for all $x, y \in G_1$ then there exists a homomorphism $H : G_1 \to G_2$ with $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ for all $x \in G_1$".

If G_1, G_2 are Banach spaces the problem was solved by Hyers [7]. Rassias in [12] and Gajda in [6] proved a stronger result that states as follows:

"Suppose that E is a real normed space, F is a real Banach space, $f : E \to F$ is a given function, and the following condition holds

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_F \leq \theta(\|x\|_E^p + \|y\|_E^P), \ \forall x, y \in E$$

for some $p \in [0; \infty)\backslash\{1\}$. Then there exists a unique additive function $c : E \to F$ such that

$$\|f(x) - c(x)\|_F \leq \frac{2\theta}{|2 - 2^p|} \|x\|_E^p, \ \forall x \in E.$$

Ngày nhận bài: 12/6/2015 ; ngày nhận đăng: 11/3/2016

This phenomenon is called generalized Hyers –Ulam stability. Radu in [11] re-established the above result by using the fixed point method. After publishing the paper [11] of Radu many mathematicians employed succesfully the fixed point method to prove the stability of solutions of many functional equations (see [1], [8], [9], [10]). Particularly, Soon-Mo Jung and Seungwook Min in [9] proved the following theorem:

1.1. Theorem (S-M Jung and S. Min) *Let X and $(Y, \|\|)$ be a vector space and a Banach space over* $\mathbf{K}$ (either $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ or $\mathrm{K} = \mathbb{R}$), *respectively. Assume that $(Y \times Y, \|\|_2)$ is a Banach space over* **K,** *where the norm $\|\|_2$ is equivalent to the supremum-norm in $Y \times Y$ and satisfies the condition:*

$$\|(u, u) - (v, v)\|_2 \leq k \|u - v\| \quad (\forall u, v \in Y)$$

for some real number $k > 0$.

Let $F : Y \times Y \to Y$ be a bounded linear map, whose norm denoted by $\|F\|$ and $\phi : X \times X \to [0; +\infty)$ be a given function, satisfying:

$$F(F(u, u), F(v, v)) = F(F(u, v), F(u, v)) \quad (\forall u, v \in Y);$$

$$\phi(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) \leq \phi(x, y) \quad (\forall x, y \in X).$$

If $k \|F\| < 1$ and a function $f : X \to Y$ satisfies the inequality

$$\|f(x + y) - F(f(x), f(y))\| \leq \phi(x, y) \quad (\forall x, y \in X) \tag{48}$$

then there exists a unique solution $f^* : X \to Y$ of the equation:

$$f(x + y) = F(f(x), f(y)) \tag{49}$$

such that

$$\|f(x) - f^*(x)\| \leq \frac{1}{1 - k \|F\|}\phi(x, x) \quad (\forall x \in X).$$

For the sake of completeness we repeat here the concept of a generalized metric space and some related propositions.

1.2. Definition. *Let X be a nonempty set. A function $d : X \times X \to [0; +\infty]$ is called a generalized metric on X if and only if d satisfies*

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M2) $d(x, y) = d(y, x) \;\; for \;\; all \;\; x, y \in X$;

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \;\; for \;\; all \;\; x, y, z \in X$.

A generalized metric space is a pair (X, d), where X is a nonempty set and d is a generalized metric on X.

Note that the only substantial difference of the generalized metric from the metric is that the range of generalized metric includes the infinity. In a generalized metric space the concepts such as limit of a sequence, Cauchy sequences are the same in a metric space. A generalized metric space (X, d) is called complete if every Cauchy sequence in X has its limit in X.

The following proposition gives an example of a complete generalized metric space which will be used hereafter.

1.3. Proposition (see [8]). *Let X be a vector space over* $\mathbf{K}$ (either K =$\mathbb{R}$ or K =$\mathbb{C}$) *and Y be a Banach space over* $\mathbf{K}$ *with the norm $\|\|$. Let $\alpha : X \to [0; +\infty)$ be an arbitrary map. Denote by E the set of all functions $h : X \to Y$. For two arbitrary functions $h, g \in E$ we put*

$$d(h, g) = \inf \{C \in [0; +\infty] : \|h(x) - g(x)\| \le C\alpha(x) \ \ \forall x \in X\}$$

(if for every positive number C there exists $x = x(C) \in X$ such that $\|h(x) - g(x)\| > C\alpha(x)$ then we have $d(h, g) = +\infty$).

Then (E, d) is a complete generalized metric space.

Proof. Obviously d satisfies (M1), (M2). Suppose that g(.), h(.), k(.) are three arbitrary functions of E. If $d(h, k)$= $+\infty$ or $d(g, k)$= $+\infty$ then automatically we have:

$$d(g, h) \le d(g, k) + d(k, h) = +\infty$$

If $d(h, k) = C_1 < +\infty,\ d(g, k) = C_2 < +\infty$ then it follows from the definition of d that for an arbitrary positive ε the following inequalities hold:

$$\|h(x) - k(x)\| \le (C_1 + \varepsilon)\alpha(x)\,, \ \ \|k(x) - g(x)\| \le (C_2 + \varepsilon)\alpha(x) \quad \forall x \in X.$$

Hence

$$\|g(x) - h(x)\| \le \|g(x) - k(x)\| + \|k(x) - h(x)\| \le (C_1 + C_2 + 2\varepsilon)\alpha(x) \quad \forall x \in X.$$

Thus $d(g, h) \le C_1 + C_2 + 2\varepsilon$. By the arbitrariness of ε we have:

$$d(g, h) \le C_1 + C_2 = d(g, k) + d(k, h).$$

So d satisfies (M3) and d is a generalized metric on E. Now we are going to prove the completeness of the generalized metric space (E, d).

Let $\{f_n\}$ be a Cauchy sequence in (E, d). For every positive number ε there exists a number $n_0 = n_0(\varepsilon)$ such that :

$$\min(m, n) \ge n_0 \Rightarrow d(f_m, f_n) < \varepsilon.$$

Equivalently,

$$\min(m, n) \ge n_0 \Rightarrow \|f_m(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon\alpha(x) \quad \forall x \in X. \tag{50}$$

The inequality (50) shows that for every fixed $x \in X$ the sequence $\{f_n(x)\}$ is a Cauchy sequence in Y. Because Y is a Banach space the sequence $\{f_n(x)\}$ converges to the limit $f(x) \in Y$. So, we have a map:

$$f : X \ni x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in Y.$$

Hence $f \in E$. In (50) letting $n \to \infty$ we get:

$$\|f_m(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\alpha(x) \quad (\forall x \in X, \forall m \geq n_0). \tag{51}$$

By the definition of the generalized metric d, the inequality (51) means:

$$d(f_m, f) \leq \varepsilon \quad (\forall m \geq n_0).$$

So, f is the limit of the Cauchy sequence $\{f_n\}$ in the generalized metric space (E, d). By the arbitrariness of the Cauchy sequence $\{f_n\}$ we conclude that (E, d) is complete generalized metric space. □

The Banach contraction principle has a modification in the complete generalized metric space setting that states as follows:

1.4. Theorem (see [4]). *Let (X, d) be a complete generalized metric space and $T : X \to X$ be a contraction with the Lipschitz constant $L \in [0; 1)$. If there exists a nonnegative integer k such that $d(T^{k+1}f, T^k f) < +\infty$ for some $f \in X$ then the followings are true:*

(a) The sequence $\{T^n f\}$ converges to a fixed point f^* of T;

(b) f^* is the unique fixed point of T in the set

$$X^* = \left\{g \in X : d(T^k f, g) < +\infty\right\};$$

(c) If $g \in X^*$ then $d(g, f^*) \leq \dfrac{1}{1-L} d(Tg, g)$.

2 The main results

Modifying the proof of Theorem 1.1 (Theorem 3.1 in the paper [9]) the author of the present paper has proved the following result:

2.1. Theorem. *Let X and $(Y, \|\|)$ be a vector space and a Banach space over* **K***(either $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ or $\mathrm{K} = \mathbb{R}$), respectively. Assume that $(Y \times Y, \|\|_2)$ is a Banach space over* **K***, where the norm $\|\|_2$ is equivalent to the supremum-norm in $Y \times Y$ and satisfies the condition:*

$$\|(u, u) - (v, v)\|_2 = \|(u - v, u - v)\|_2 \leq k \|u - v\| \quad (\forall u, v \in Y) \tag{52}$$

for some real number $k > 0$.

Let $F : Y \times Y \to Y$ be a map such that:

i)

$$F(F(u,u),F(v,v)) = F(F(u,v),F(u,v)) \quad (\forall u,v \in Y); \tag{53}$$

ii) F is a Lipschitz map. This means there exists a constant $L \geq 0$ such that:

$$\|F(u,v) - F(u',v')\| \leq L\,\|(u,v)-(u',v')\|_2 = L\,\|(u-u',v-v')\|_2 \qquad (\forall u,v,u',v' \in Y). \tag{54}$$

There exists a function $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$, satisfying:

$$\phi(\frac{x}{2},\frac{y}{2}) \leq \phi(x,y) \quad (\forall x,y \in X) \tag{55}$$

and there exist functions $g : X \times X \to X$ and $f : X \to Y$ such that:

$$g(\frac{1}{2}x,\frac{1}{2}y) = \frac{1}{2}g(x,y) \quad (\forall x,y \in X); \tag{56}$$

$$g(x,x) = 2x \quad (\forall x \in X); \tag{57}$$

$$\|f(g(x,y)) - F(f(x),f(y))\| \leq \phi(x,y) \quad (\forall x,y \in X). \tag{58}$$

If $kL < 1$ then there exists a unique solution $f^* : X \to Y$ of the equation:

$$f(g(x,y)) = F(f(x),f(y)) \quad (\forall x,y \in X) \tag{59}$$

such that

$$\|f(x) - f^*(x)\| \leq \frac{1}{1-kL}\phi(x,x) \quad (\forall x \in X). \tag{60}$$

Remark. Obviously, a bounded linear map $F : Y \times Y \to Y$ with the norm $\|F\|$ is a Lipschitz map with the constant $L = \|F\|$, the function $g(x,y) = x+y$ satisfies (56), (57). So Theorem 1.1 is a special case of Theorem 2.1.

After the proof of Theorem 2.1, we shall show an example of the maps F and g, which are nonlinear maps and satisfying the conditions in Theorem 2.1 in the case of $X = Y = \ell^\infty(D)$, where D is an arbitrary nonempty set and $\ell^\infty(D)$ is the Banach space of all bounded real functions defined on D with the supremum-norm. This example shows that Theorem 2.1 is truly stronger than Theorem 1.1.

Proof. The proof can be divided into three steps.

1. Put $\alpha(x) = \phi(x,x)$, then α is a map from X into $[0;+\infty)$. Denote by E the set of all functions $h : X \to Y$. For two arbitrary functions $h, l \in E$ we put

$$d(h,l) = \inf\left\{C \in [0;+\infty] : \|h(x) - l(x)\| \leq C\alpha(x) = C\phi(x,x) \;\; \forall x \in X\right\}. \tag{61}$$

By the proposition 1.3 (E, d) is a complete generalized metric space. Define a map $T : E \to E$ by

$$(Th)(x) = F(h(\frac{x}{2}), h(\frac{x}{2})) \quad (\forall h \in E, \forall x \in X). \tag{62}$$

We claim that T is a contraction on E with the Lipschitz constant $kL < 1$. Given $h, l \in E$, let $C \in [0; +\infty]$ be an arbitrary constant with $d(l, h) \leq C$, that is,

$$\|l(x) - h(x)\| \leq C\phi(x, x) \quad \forall x \in X \tag{63}$$

By (62) and (52),(54), (55) we have

$$\|(Tl)(x) - (Th)(x)\| = \left\|F(l(\frac{x}{2}), l(\frac{x}{2})) - F(h(\frac{x}{2}), h(\frac{x}{2}))\right\| \leq L \left\|(l(\frac{x}{2}), l(\frac{x}{2})) - (h(\frac{x}{2}), h(\frac{x}{2}))\right\|_2$$

$$\leq kL \left\|l(\frac{x}{2}) - h(\frac{x}{2})\right\| \leq kLC\phi(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) \leq kLC\phi(x, x) \qquad (\forall x \in X).$$

By (61) we get $d(Tl, Th) \leq kLC$ for every C with $d(l, h) \leq C$. This means

$$d(Tl, Th) \leq kLd(l, h) \tag{64}$$

and T is a contraction with the Lipschitz constant $kL < 1$.

Replacing in (58) x , y by $\frac{x}{2}$, and using (55), (57), (58), (62) we get

$$\left\|f(g(\frac{x}{2}, \frac{x}{2})) - (Tf)(x)\right\| \leq \phi(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}) \leq \phi(x, x) \quad (\forall x \in X)$$

$$\Leftrightarrow \|f(x) - (Tf)(x)\| \leq \phi(x, x) \qquad (\forall x \in X) \tag{65}$$

$$\Leftrightarrow d(f, Tf) \leq 1.$$

Taking k = 0 in Theorem 1.4, then it follows from (64), (65) and Theorem 1.4 that T has a fixed point $f^* \in E$ such that

$$\lim_{n\to\infty} d(T^n f, f^*) = 0, \ \ d(f, f^*) \leq \frac{1}{1 - kL} \tag{66}$$

and f^* is the unique fixed point of T with $d(f, f^*) < +\infty$.

2. Now we assert that

$$\|(T^n f)(g(x, y)) - F((T^n f)(x), (T^n f)(y))\| \leq (kL)^n \phi(x, y) \quad (\forall x, y \in X, \forall n \in \mathbb{N}). \tag{67}$$

By (62), (53), (54), (55) and the properties (56), (57), (58) of the functions g, f we have

$$\|(Tf)(g(x,y)) - F((Tf)(x),(Tf)(y))\|$$

$$= \left\|F(f(\frac{g(x,y)}{2}), f(\frac{g(x,y)}{2})) - F(F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{x}{2})), F(f(\frac{y}{2}), f(\frac{y}{2}))\right\|$$

$$= \left\|F(f(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})), f(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2}))) - F(F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{y}{2})), F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{y}{2}))\right\|$$

$$\leq L\left\|(f(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})), f(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2}))) - (F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{y}{2})), F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{y}{2})))\right\|_2$$

$$\leq kL\left\|f(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})) - F(f(\frac{x}{2}), f(\frac{y}{2}))\right\| \leq (kL)\phi(\frac{x}{2},\frac{y}{2}) \leq (kL)\phi(x,y).$$

So, (67) is true for n = 1. Assume that (67) is true for some $n \geq 1$. Then, applying again (62) and the conditions (53), (54), (55), the properties (56), (57), (58) of the functions g, f we get

$$\|(T^{n+1}f)(g(x,y)) - F((T^{n+1}f)(x),(T^{n+1}f)(y))\|$$

$$= \left\|F((T^nf)(\frac{g(x,y)}{2}), (T^nf)(\frac{g(x,y)}{2})) - F(F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{x}{2})), F((T^nf)(\frac{y}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2}))\right\|$$

$$= \left\|F((T^nf)(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})), (T^nf)(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2}))) - F(F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2})), F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2}))\right\|$$

$$\leq L\left\|((T^nf)(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})), (T^nf)(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2}))) - (F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2})), F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2}))\right\|_2$$

$$\leq kL\left\|(T^nf)(g(\frac{x}{2},\frac{y}{2})) - F((T^nf)(\frac{x}{2}), (T^nf)(\frac{y}{2}))\right\| \leq (kL)^{n+1}\phi(\frac{x}{2},\frac{y}{2}) \leq (kL)^{n+1}\phi(x,y)$$

which proves that (67) is true for n+1. By the induction principle we get the validity of (67) for all $n \in \mathbb{N}$.

3. We finish the proof by showing that

$$f^*(g(x,y)) = F(f^*(x), f^*(y)) \quad (\forall x, y \in X)$$

Because F is Lipschitz from $(Y \times Y, \|\|_2)$ into $(Y, \|\|)$ we get F is a continuous map. For a fixed pair $(x,y) \in Y \times Y$, it follows from (66) and the definition of the generalized metric d that

$$\lim_{n\to\infty} \|(T^nf)(g(x,y)) - f^*(g(x,y))\| = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|(T^nf)(x) - f^*(x)\| = 0, \ \lim_{n\to\infty} \|(T^nf)(y) - f^*(y)\| = 0.$$

By the continuity of the norm $\|\|$ and of F (taking into account the norm in $Y \times Y$ is equivalent to the supremum-norm in $Y \times Y$ and $0 \leq kL < 1$), letting $n \to \infty$ in (67) we get

$$0 \leq \|f^*(g(x,y)) - F(f^*(x), f^*(y))\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|(T^n f)(g(x,y)) - F((T^n f)(x), (T^n f)(y))\| \leq \lim_{n\to\infty} (kL)^n \phi(x,y) = 0$$

$$\Leftrightarrow f^*(g(x,y)) = F(f^*(x), f^*(y)).$$

Because of arbitrariness of the pair $(x, y) \in Y \times Y$ we receive (59). The estimation (60) follows from (66) and the definition of the generalized metric d. This completes the proof.

Remarks. i) Let X, Z be vector spaces over $\mathbb{R}$. A map $\Phi : X \to Z$ is called to be homogeneous if $\Phi(tx) = t\Phi(x)$ for all $t \in \mathbb{R}, x \in X$ and called to be 0-homogeneous if $\Phi(tx) = \Phi(x)$ for all $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, x \in X$.

Given a real number p. A map $\Phi : X \to Z$ is called to be p-positively homogeneous if $\Phi(tx) = t^p\Phi(x)$ for all $t > 0, x \in X$.

Now let $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be a homogeneous continuous function. We define a map F: $\ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D) \to \ell^\infty(D)$ by the formula:

$$F(u,v)(t) = \Phi(u(t), v(t)) \ \ for \ \ u, v \in \ell^\infty(D), \forall t \in D. \tag{68}$$

The map F is well-defined by the continuity of the function Φ.

We show that F satisfies the condition (53). Indeed, we have:

$$\begin{aligned} &F(F(u,v), F(u,v))(t) = \Phi(F(u,v)(t), F(u,v)(t)) \\ &= \Phi(\Phi(u(t), v(t)), \Phi(u(t), v(t))) = \Phi(u(t), v(t)).\Phi(1,1) \quad (\forall t \in D); \end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned} &F(F(u,u), F(v,v))(t) = \Phi(F(u,u)(t), F(v,v)(t)) \\ &= \Phi(\Phi(u(t), u(t)), \Phi(v(t), v(t))) \\ &= \Phi(u(t).\Phi(1,1), v(t).\Phi(1,1)) = \Phi(1,1).\Phi(u(t), v(t)) \quad (\forall t \in D). \end{aligned} \tag{70}$$

Comparing (69), (70) we conclude that $F(F(u,u), F(v,v)) = F(F(u,v), F(u,v))$ for every $u, v \in \ell^\infty(D)$ and the condition (53) holds for F defined by (68) and $Y = \ell^\infty(D)$.

ii) If $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is a Lipschitz map when the norm in $\mathbb{R}^2$ is the supremum-norm then the map F defined by (68) is also Lipschitz when the norm $\|\|_2$ in $\ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D)$ is the supremum-norm and the Lipschitz constants of Φ and F are the same. Indeed, if

$$|\Phi(x,y) - \Phi(\overline{x}, \overline{y})| \leq L \max(|x - \overline{x}|, |y - \overline{y}|)$$

then

$$\|F(u,v)-F(\overline{u},\overline{v})\|_\infty = \sup_{t\in D}|\Phi(u(t),v(t))-\Phi(\overline{u}(t),\overline{v}(t))|$$

$$\le L\sup_{t\in D}\max(|u(t)-\overline{u}(t)|\,,|v(t)-\overline{v}(t)|) = L\max(\sup_{t\in D}|u(t)-\overline{u}(t)|\,,\sup_{t\in D}|v(t)-\overline{v}(t)|)$$

$$= L\,\|(u,v)-(\overline{u},\overline{v})\|_2 \qquad (u,v,\overline{u},\overline{v}\in\ell^\infty(D))$$

where the notation $\|\|_\infty$ stands for the supremum-norm in $\ell^\infty(D)$

iii) If $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is a homogeneous continuous function, which has the continuous partial derivatives $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, then Φ is a Lipschitz map. Indeed, the partial derivatives of a such function are 0-homogeneous functions, which are continuous in $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Therefore, these partial derivatives are bounded on the circle $x^2+y^2=1$. Putting

$$L=\sup_{x^2+y^2=1}\left\{\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right|\right\}$$

and using the 0-homogeneity of the partial derivatives $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}$ we get

$$L=\sup_{x^2+y^2>0}\left\{\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right|\right\}.$$

By the Lagrange formula it is easy to show that when the norm in $\mathbb{R}^2$ is the supremum-norm Φ is a Lipschitz map with the Lipschitz constant is L. For instance, taking $\Phi(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ for $(x,y)\neq(0,0)$ and $\Phi(0,0)=0$, we have

$$L=\sup_{x^2+y^2=1}\left\{\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\right|+\left|\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\right|\right\}=3$$

and Φ is a Lipschitz map with the Lipschitz constant $L=3$, if the norm in $\mathbb{R}^2$ is the supremum-norm.

iv) It is easy to see that if $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ is a continuous homogeneous function which satisfies the condition (57) then the map $g:\ell^\infty(D)\times\ell^\infty(D)\to\ell^\infty(D)$ defined by

$$g(u,v)(t)=G(u(t),v(t))\quad\forall(u,v)\in\ell^\infty(D)\times\ell^\infty(D),\forall t\in D$$

satisfies the conditions (56), (57) with $X=\ell^\infty(D)$. Without difficulty to observe that the cardinality of the set all of such functions G is infinity. One of such functions is the function $G(x,y)=\sqrt[3]{x^3+7y^3}$.

In the remarks i)-iv) all affirmations remain true if the space $\ell^\infty(D)$ is replaced by the space $C(D)$ of all continuous real functions on a compact D.

v) If $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ is a nondecreasing function and $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$ is a function, which satisfies (55), then clearly the function $\eta \circ \phi$ also satisfies (55). It was remarked in the paper [9] that if X is a normed space with the norm $\|\|$ then the function $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$, defined by

$$\phi(x,y) = \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

for some nonnegative θ and p, satisfies (55). In fact, every p– positively homogeneous function $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$ with $p > 0$ satisfies (55). Indeed, if $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$ is a such function then we have:

$$\phi(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}) = \frac{1}{2^p}\phi(x,y) \leq \phi(x,y) \quad (\forall x, y \in X).$$

Hence, we get the function $\eta(\phi(x,y))$ satisfies (55) for an arbitrary nondecreasing function $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ and any p–positively homogeneous function $\phi : X \times X \to [0;+\infty)$ with $p > 0$.

Combining all above remarks now we can state

2.2.Corollary._Let_ $p > 0$ _and_ $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ _be a nondecreasing function. Let_ $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ _be a homogeneous continuous function, which is continuously differentiable in_ $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. _Denote_ $L = \sup\limits_{x^2+y^2=1} \left\{ \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y)\right| \right\}$ _and define a map_ $F : \ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D) \to \ell^\infty(D)$ _by the formula:_

$$F(u,v)(t) = \Phi(u(t), v(t)) \;\; for \;\; u, v \in \ell^\infty(D), \forall t \in D.$$

Let $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ _is a homogeneous continuous function which satisfies the condition_ (57) _and the map_ $g : \ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D) \to \ell^\infty(D)$ _defined by_

$$g(u,v)(t) = G(u(t), v(t)) \quad \forall (u,v) \in \ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D), \forall t \in D.$$

Assume that there exists a function $f : \ell^\infty(D) \to \ell^\infty(D)$ _which satisfies_

$$\|f(g(u,v)) - F(f(u), f(v))\|_\infty \leq \eta(\|u\|_\infty^p + \|v\|_\infty^p)$$

where $\|\|_\infty$ _stands for the supremum-norm in_ $\ell^\infty(D)$. _If_ $L < 1$ _then there exists a unique function_ $f^* : \ell^\infty(D) \to \ell^\infty(D)$ _which satisfies_

$$f^*(g(u,v)) = F(f^*(u), f^*(v)) \quad (\forall u, v \in \ell^\infty(D))$$

and

$$\|f^*(u) - f(u)\|_\infty \leq \frac{\eta(2\|u\|_\infty)}{1-L} \qquad (\forall u \in \ell^\infty(D)). \tag{71}$$

The conclusions of the corollary remain true if the space $\ell^\infty(D)$ _is replaced by the space_ $C(D)$ _of all continuous real functions on a compact_ D.

Proof. Taking $X = Y = \ell^\infty(D)$ in Theorem 2.1. Assume that the norm $\|\|_2$ in $\ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D)$ is the supremum-norm. We have

$$\|(u,u) - (v,v)\|_2 = \|(u-v, u-v)\|_2 = \max(\|u-v\|_\infty, \|u-v\|_\infty) = \|u-v\|_\infty .$$

So the constant k in Theorem 2.1 is equal to 1. By the remarks i)-v) we get all the hypotheses of Theorem 2.1 are satisfied, where the Lipschitz constant of F is $L < 1$, the function $\phi(u,v) = \eta(\|u\|_\infty^p + \|v\|_\infty^p)$ plays the role of the function $\phi : X \times X = \ell^\infty(D) \times \ell^\infty(D) \to [0; +\infty)$. The formula (71) is reduced from the one (60) of Theorem 2.1. $\square$

REFERENCES

1. L. Cădariu and V. Radu, "Fixed points and the stability of Jensen's functional equation", J. Inequal. Pure Appl. Math., **4,** no.1, Art 4 (2003).
2. L.Cădariu and V.Radu, "On the stability of the Cauchy functional equation: a fixed point approach", Grazer Math. Ber, 346, pp 43-52 (2004).
3. P.W. Cholewa, " The stability problem for a generalized Cauchy type functional equation". Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées, vol 29, no 6, pp 457-460, (1984).
4. J.Diaz and B.Margolis, " A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S) **74**, pp 305-309 (1968).
5. G.L. Forti, " An existence and stability theorem for a class of functional equations". Stochastica, vol.4, no. 1, pp 23-30 (1980).
6. Z.Gajda. " On stability of additive mappings ", Internat. J. Math. Sci.,**14**, pp 431-434 (1991).
7. D.H. Hyers, "On the stability of the linear functional equation", Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **27** , pp 222-224 (1941).
8. S-M. Jung and Z-H Lee, " A fixed point approach to the stability of quadratic functional equation with involution", Fixed Point Theory and Applications, vol 2008, Article ID 732086, 11 pages (2008).
9. S-M Jung and S. Min, " A Fixed Point Approach to the stability of the Functional Equation $f(x+y) = F(f(x), f(y))$". Fixed Point Theory and Applications, vol 2009, Article ID 912046, 8 pages (2009).
10. C.Park and T.M. Rassias. " Fixed point and stability of the Cauchy functional equation", The Australian. Jour. of Math. Analysis and Applications, vol 6, Issue 1. Article 14, pp 1-9 (2009).
11. V. Radu, " The fixed point alternative and the stability of functional equation", Fixed Point Theory, **4**, pp 91-96 (2003).
12. Th.M. Rassias. " On the stability of the linear mapping in Banach spaces", Pro. Amer. Math. Soc., **72**, pp 297-300 (1978).
13. S.M. Ulam. A collection of Mathematical Problem, Interscience Tracs in Pure and Applied Mathematics, no.8, Interscience, New York, NY, USA (1960).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.47-59

SOME NEW OPIAL-TYPE INEQUALITIES ON TIME SCALES

TRẦN ĐÌNH PHỤNG[1*] AND ĐINH THANH ĐỨC[2]
[1,2]Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, Quy Nhơn, Bình Định.
*Email: trandinhphung89@gmail.com

ABSTRACT

In this paper, we consider Rozanova and Levin's generalizations of Opial's inequality and extend them to inequalities in several independent variables. Also, we present some new Opial-type inequalities in several independent variables on an arbitrary time scales when the endpoints are not necessarily zeros but generalized zeros.

Keywords: Opial-type inequality, Time scale, Partial differential dynamic equation

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xét các mở rộng của Rozanova và Levin cho bất đẳng thức Opial và mở rộng chúng đến trường hợp nhiều biến. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng giới thiệu một số bất đẳng thức loại Opial mới trong trường hợp nhiều biến trên thang thời gian tùy ý khi các điểm đầu mút là các không điểm tổng quát.

1 Introduction

In 1960, Opial [13] established the following integral inequality

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|dx \le \frac{a}{4}\int_0^a |f'(x)|^2 dx, \tag{72}$$

where f is absolutely continuous on $[0,a]$ such that $f(0)=f(a)=0$. Since then, many generalizations of Opial's inequality (72) in various directions by considering powers of f and f' have been given. In 1967, Godunova and Levin [8] proved the following results:
If F is a convex and increasing function on $[0,\infty)$ with $F(0)=0$, and f is a real-valued absolutely continuous function defined on $[0,a]$ with $f(0)=0$, then

$$\int_0^a F'(|f(x)|)|f'(x)|dx \le F\bigg(\int_0^a |f'(x)|dx\bigg). \tag{73}$$

Let f be a real-valued absolutely continuous function defined on $[0,a]$ with $f(0)=f(a)=0$, and $r(x)>0$, $\int_0^a r(t)dt=1$. If F and H are convex increasing functions on $[0,\infty)$ and $F(0)=0$, then

$$\int_0^a F'(|f(x)|)|f'(x)|dx \le 2F\Bigg(H^{-1}\bigg(\int_0^a r(x)H\Big(\frac{|f'(x)|}{2r(x)}\Big)dx\bigg)\Bigg). \tag{74}$$

Ngày nhận bài: 11/8/2015 ; ngày nhận đăng: 27/9/2016

Later, some multidimentional generalizations of (73) and (74) were given, such as Pečarić [16], Pachpatte [15], and Andrić et al. [3].

In recent years, the theory of time scales which was introduced by Hilger [9] in order to unify the study of differential and difference equations, has received a lot of attention. The readers may find much of time scales calculus in books by Bohner and Peterson [4], [5]. One of main subjects of the qualitative analysis on time scales is to prove some new dynamic inequalities. Opial-type inequalities on time scales was first proved by Bohner and Kaymakçalan [6] in 2001 (see also [1]), in which they showed that if $f : [0, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ is delta differentiable with $f(0) = 0$, then

$$\int_0^b |[f(x) + f^\sigma(x)]f^\Delta(x)|\Delta x \leq b \int_0^b |f^\Delta(x)|^2 \Delta x. \tag{75}$$

Afterwards, numerous authors have studied variants of (75) (see, for example, [10], [11], [18], [19], [20], [21], and [23]). The best reference here is the book by Agarwal, O'Regan, and Saker [2, Chapter 3], which summarizes all important papers on this subject.

Although Opial-type inequalities are very classical and well known. However, there is hardly any result involving functions of several variables and their partial derivatives on time scales in the case when the endpoints are not necessarily zeros. Thus, the aim of this paper is to study some integral inequalities for delta derivatives acting on compositions of functions on time scales which are in turn applied to establish multidimentional dynamic Opial-type inequalities when the endpoints are generalized zeros.

2 Preliminaries

In this section, a brief list of essential definitions and lemmas which are necessary for our results are given. For the most part we assume the readers were so familiar with basic time scales calculus. More information about time scales calculus can be found in [4] and [5]. In this section, we only present some basic definitions and notations about calculus in several variables on time scales.

Let $\mathbb{T}$ be a time scale, and let σ, ρ, and Δ denote, respectively, the forward jump, backward jump, and delta operator on $\mathbb{T}$. Fix $n \in \mathbb{N}$ and let $\mathbb{T}_j$, where $j = 1, ..., n$, be time scales, and

$$\Lambda^n = \mathbb{T}_1 \times \cdots \times \mathbb{T}_n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) : x_j \in \mathbb{T}_j \text{ for all } j \in [1, n]_{\mathbb{N}}\}$$

be the n-dimensional time scale. For $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, let σ_j, ρ_j, and Δ_j denote, respectively, the forward jump, backward jump, and delta operator on $\mathbb{T}_j$. The graininess functions $\mu_j : \mathbb{T}_j \to [0, \infty)$ are defined by $\mu_j(x_j) = \sigma_j(x_j) - x_j$ for $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. For $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n) \in \Lambda^n$, we shall write $\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$ instead of $x_j \leq y_j$ for all $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. Analogously one has to understand $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$, respectively. We denote by $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ the multi-index, i.e. $\lambda_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. In particular, let $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$. Let $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_n)$,

$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) = (\sigma_1(a_1), ..., \sigma_n(a_n))$, and $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b}) = (\sigma_1(b_1), ..., \sigma_n(b_n))$. We set

$$\Omega = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \Lambda^n : \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\},$$

$$\Omega' = [\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}'] = [a_2, b_2]_{\mathbb{T}_2} \times \cdots \times [a_n, b_n]_{\mathbb{T}_n}.$$

We denote by $\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$ (or $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x}$) and $\int_{\Omega'} f(\boldsymbol{x}')\Delta \boldsymbol{x}'$ for $\boldsymbol{x}' \in \Omega'$, are $n-$fold integrals $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, ..., x_n)\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$, and $(n-1)-$fold integral $\int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_2, ..., x_n)\Delta x_2 \cdots \Delta x_n$, respectively.

Let $f : \Lambda^n \to \mathbb{R}$. The *partial delta derivative* of f with respect to $x_j \in \mathbb{T}_j^\kappa$ is defined as the limit

$$\lim_{\substack{t_j \to x_j \\ t_j \neq \sigma_j(x_j)}} \frac{f(x_1, ..., \sigma_j(x_j), ..., x_n) - f(x_1, ..., t_j, ..., x_n)}{\sigma_j(x_j) - t_j}$$

provided that this limit exists as a finite number, and is denoted by $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\Delta_j x_j}$. If f has partial derivatives $\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\Delta_j x_j}, j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$, then we can also consider their partial delta derivatives. These are called *second order* partial delta derivatives. We write

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\Delta_j x_j^2} = \frac{\partial}{\Delta_j x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\Delta_j x_j}\right), \quad \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\Delta_j x_j \Delta_i x_i} = \frac{\partial}{\Delta_j x_j}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\Delta_i x_i}\right).$$

Higher order partial delta derivatives are similarly defined. We set $\frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} = \frac{\partial^n f(\boldsymbol{x})}{\Delta_1 x_1 \cdots \Delta_n x_n}$. By $C_{\mathrm{rd}}^{n\mathbf{1}}(\Omega)$, we denote the set of all functions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ which have rd-continuous derivatives $\frac{\partial^j f(\boldsymbol{x})}{\Delta_1 x_1 \cdots \Delta_j x_j}$ for $j \in [1, n]_{\mathbb{N}}$. A function $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ is said to be a weight on Ω if τ is positive-valued and rd-continuous on Ω. Let us denote by $\mathcal{W}(\Omega)$ the set of all weights on Ω. Let $f : \Omega \to \mathbb{R}$ be a function. We say that f has a generalized zero (GZ for short) at $\boldsymbol{c} \in \Omega$ provided that $f(\boldsymbol{x})|_{x_j = c_j} = 0$ or $(f(\boldsymbol{x})|_{x_j = c_j})(f(\boldsymbol{x})|_{x_j = \sigma_j(c_j)}) < 0$ for all $i = 1, ..., n$. Let $p \geq 1$ and $\tau \in \mathcal{W}(\Omega)$. We represent by $\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^p(\Omega, \tau)$ the set of all functions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ of class $C_{\mathrm{rd}}^{n\mathbf{1}}(\Omega)$ for which f has a GZ at $\boldsymbol{a}$, and that $\int_\Omega |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}|^p \tau(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} < \infty$.

Let m be a positive integer and $0 < R \leq \infty$. We represent by $\mathcal{H}_R^m$ the set of all functions $F : (-R, R)^m \to \mathbb{R}$ such that

1. $F \in C^1((-R, R)^m)$,
2. $F(0, ..., 0) = 0$, and
3. $D_i F$ for $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, are non-negative and increasing in each variable on $(0, R)$, where $D_i = \partial/\partial t_i, i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ for all $(t_1, ..., t_m) \in (-R, R)^m$.

We give some preliminary lemmas that we shall use in Section 3.

Lemma 1. *If $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is $\Delta-$differentiable at $x \in \mathbb{T}^\kappa$, then*

$$f^\sigma(x) = f(x) + \mu(x) f^\Delta(x). \tag{76}$$

For $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{T}^\kappa$, we have

$$\int_a^{\sigma(a)} f(x)\Delta x = \mu(a)f(a). \tag{77}$$

Lemma 2. *Let $p > 1, q > 1$ be conjugate exponents, i.e., $1/p + 1/q = 1$. For $\tau \in \mathcal{W}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}])$ and $f \in \mathcal{L}^p_{\boldsymbol{a}}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \tau)$. Then, there exists $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\xi} < \boldsymbol{1}$ such that $(1-\xi_j)f(\boldsymbol{x})|_{x_j=a_j} + \xi_j f(\boldsymbol{x})|_{x_j=\sigma_j(a_j)} = 0, j = 1, ..., n$. By setting ${\chi^j}_{\xi_j}(x_j) = 1$ if $x_j \in (a_j, c_j]_{\mathbb{T}_j}$ and ${\chi^j}_{\xi_j}(a_j) = 1 - \xi_j$, $\chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^n {\chi^j}_{\xi_j}(x_j)$, $\tau_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{t})\tau^{-q/p}(\boldsymbol{t})\Delta \boldsymbol{t}$, $F_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{t})|\frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}}|^p \tau(\boldsymbol{t})\Delta \boldsymbol{t}$, then*

$$|f(\boldsymbol{x})| \leq F_{\boldsymbol{\xi}}^{1/p}(\boldsymbol{x})\tau_{\boldsymbol{\xi}}^{1/q}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]. \tag{78}$$

Similarly, for $\tau \in \mathcal{W}([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})])$ and $f \in \mathcal{L}^p_{\boldsymbol{b}}([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})], \tau)$. Then, there exists $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\eta} < \boldsymbol{1}$ such that $(1 - \eta_j)f(\boldsymbol{x})|_{x_j=b_j} + \eta_j f(\boldsymbol{x})|_{x_j=\sigma_j(b_j)} = 0$, j =1, ..., n. Let ${\lambda^j}_{\eta_j}(x_j) = 1$ if $x_j \in [c_j, b_j)_{\mathbb{T}_j}$ and ${\lambda^j}_{\eta_j}(b_j) = \eta_j$, $\lambda_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^n {\lambda^j}_{\eta_j}(x_j)$, $\hat{\tau}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{t})\tau^{-q/p}(\boldsymbol{t})\Delta \boldsymbol{t}$, $\hat{F}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{t})|\frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}}|^p \tau(\boldsymbol{t})\Delta \boldsymbol{t}$, then

$$|f(\boldsymbol{x})| \leq \hat{F}_{\boldsymbol{\eta}}^{1/p}(\boldsymbol{x})\hat{\tau}_{\boldsymbol{\eta}}^{1/q}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}]. \tag{79}$$

Proof. Since $f(\boldsymbol{x})|_{x_j=a_j} = 0$ or $(f(\boldsymbol{x})|_{x_j=a_j})(f(\boldsymbol{x})|_{x_j=\sigma_j(a_j)}) < 0$ for all $i = 1, ..., n$, it follows that there exists $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{\xi} < \boldsymbol{1}$ such that $(1 - \xi_j)f(\boldsymbol{x})|_{x_j=a_j} + \xi_j f(\boldsymbol{x})|_{x_j=\sigma_j(a_j)} = 0, j = 1, ..., n$. Since (76) and (77), we have

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x})|_{x_1=a_1} + \int_{a_1}^{x_1} \frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\Delta t_1 \\
&= \xi_j(f(\boldsymbol{x})|_{x_j=a_j} - f(\boldsymbol{x})|_{x_j=\sigma_j(a_j)}) + \int_{a_1}^{\sigma_1(a_1)} \frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\Delta t_1 \\
&+ \int_{\sigma_1(a_1)}^{x_1} \frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\Delta t_1 \\
&= (1 - \xi_1)\mu_1(a_1)\frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\bigg|_{t_1=a_1} + \int_{\sigma_1(a_1)}^{x_1} \frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\Delta t_1 \\
&= \int_{a_1}^{x_1} {\chi^1}_{\xi_1}(t_1)\frac{\partial f(t_1, x_2, ..., x_n)}{\Delta_1 t_1}\Delta t_1.
\end{aligned}$$

Similarly, one can show that

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{t})\frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{1}}}\Delta \boldsymbol{t} \quad \text{for all} \quad \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]. \tag{80}$$

Applying Hölder's inequality with indices p and q to (80) yields (78) as required. The proof for (79) is similar. □

Lemma 3. *[17] Let $F \in \mathcal{H}^m_R$ and $g_i : \mathbb{T} \to [0, R)$ for $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, are delta differentiable on $\mathbb{T}^\kappa$ such that g_i^Δ are non-negative on $\mathbb{T}^\kappa$; then the composite function $F(g_1(x), ..., g_m(x))$ is delta differentiable* *on $\mathbb{T}^\kappa$ such that*

$$[F(g_1(x),...,g_m(x))]^\Delta \geq \sum_{i=1}^{m} D_iF(g_1(x),...,g_m(x))g_i^\Delta(x), \quad x \in \mathbb{T}^\kappa.$$

3 Main results

In what follows, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, and $\boldsymbol{c}$ belong to Λ^n such that $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}) < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{b}$. If $f_i \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{a}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],\tau)$ for $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$, then $\chi_{\boldsymbol{\xi}_i}$ are defined as in Lemma 2. Similar considerations apply to the case $f_i \in \mathcal{L}^p_{\mathbf{a}}([\boldsymbol{c},\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})],\tau)$. We obtain the following theorem.

Theorem 4. *Let $F \in \mathcal{H}^m_R$ for $0 < R \leq \infty$, and $f_i : [\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}] \to (-R,R)$ which satisfies*

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x})|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}|\Delta \boldsymbol{x} < R$$

for $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$. If $f_i \in \mathcal{L}^1_{\boldsymbol{a}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],1)$ for all $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$, then

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \Bigg(\sum_{i=1}^{m} D_iF(|f_1(\boldsymbol{x})|,...,|f_m(\boldsymbol{x})|)\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Bigg)\Delta \boldsymbol{x} \\
&\leq F\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x},...,\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x}\Bigg) \\
&- F\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x},...,\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x}\Bigg).
\end{aligned} \tag{81}$$

If $f_i : [\boldsymbol{c},\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})] \to (-R,R)$ which satisfies $\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x})|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}|\Delta \boldsymbol{x} < R$ and $f_i \in \mathcal{L}^1_{\boldsymbol{a}}([\boldsymbol{c},\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})],1)$ for all $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$, then

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{b}} \Bigg(\sum_{i=1}^{m} D_iF(|f_1(\boldsymbol{x})|,...,|f_m(\boldsymbol{x})|)\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Bigg)\Delta \boldsymbol{x} \\
&\leq F\Bigg(\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x},...,\int_{\boldsymbol{c}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}_m}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x}\Bigg) \\
&- F\Bigg(\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x},...,\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \lambda_{\boldsymbol{\eta}_m}(\boldsymbol{x})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{x}\Bigg).
\end{aligned} \tag{82}$$

Proof. We give the proof only for the case $f_i \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{a}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],1), i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$; the proof of the other case is similar and therefore omitted. Since $f_i \in \mathcal{L}^1_{\boldsymbol{a}}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}],1)$, it follows that

$$f_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{t})\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\mathbf{1}}}\Delta \boldsymbol{t}$$

for all $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{c}]$ and all $i \in [1,m]_{\mathbb{N}}$. Let

$$g_i(x_1) := \int_{a_1}^{x_1}\int_{\boldsymbol{a}'}^{\boldsymbol{c}'} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\mathbf{t})\left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\mathbf{1}}}\right|\Delta \boldsymbol{t} \quad \text{for} \quad x_1 \in [\sigma(a_1),c_1]_{\mathbb{T}}, \quad i \in [1,m]_{\mathbb{N}}.$$

We see that $|f_i(\boldsymbol{x})| \leq g_i(x_1)$ for $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]$ and functions $g_i, i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, are increasing on $[\sigma(a_1), c_1]_{\mathbb{T}}$. By $F \in \mathcal{H}_R^m$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i F(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \right) \Delta \boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i F(g_1(x_1)), ..., g_m(x_1)) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \right) \Delta \boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{\sigma_1(a_1)}^{c_1} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i F(g_1(x_1), ..., g_m(x_1)) \int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})'}^{\boldsymbol{c}'} \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \Delta \boldsymbol{x}' \right) \Delta x_1 \\
&\leq \int_{\sigma_1(a_1)}^{c_1} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i F(g_1(x_1), ..., g_m(x_1)) \frac{\partial g_i(x_1)}{\Delta_1 x_1} \right) \Delta x_1,
\end{aligned}$$

which, in view of Lemma 3, yields

$$\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i F(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \right) \Delta \boldsymbol{x} \\
&\leq \int_{\sigma_1(a_1)}^{c_1} F^{\Delta_1}(g_1(x_1), ..., g_m(x_1)) \Delta x_1 \\
&= F\left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \Delta \boldsymbol{x}, ..., \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right| \Delta \boldsymbol{x} \right) \\
&- F\left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \right| \Delta \mathbf{x}, ..., \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \right| \Delta \mathbf{x} \right),
\end{aligned}$$

which completes the proof. □

Remark 5. *From Theorem 4 we can obtain many known results.*

1. *If $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, then Theorem 4 becomes [7, Theorem 1] which was established by Brnetić and Pečarić.*
2. *If $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $n = m = 1$, and F is convex on $[0, \infty)$, then inequality* (81) *reduces to* (73).
3. *Let $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $n = 1$ and $F(x_1, ..., x_m) = |x_1 \cdots x_m|$. Then* (81) *becomes [15, Theorem 1].*
4. *If $f(\boldsymbol{x})|_{x_j = a_j} = 0$ for all $j = 1, ..., m$, then Theorem 4 becomes [17, Theorem 3.1]*

The following theorem generalizes Rozanova's inequality (74) to functions of several variables on time scales.

Theorem 6. *Let F be a convex increasing function in each variable on $[0, \infty)$ with $F(0, ..., 0) = 0$, $H_i, i = 1, ..., m$ be convex increasing functions in on $[0, \infty)$, $r_i(\boldsymbol{x}) > 0, i = 1, ..., m$ on $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})]$ and $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} = 1$. If $f_i \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^1([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], 1) \cap \mathcal{L}_{\boldsymbol{b}}^1([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})], 1)$ for all $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, where $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] \cup [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})] =$*

$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})]$ *for some* $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b})$*, then*

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{b}} \Big(\sum_{i=1}^{m} D_i F(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Big) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\le 2F\Bigg(H_1^{-1}\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_1(\boldsymbol{x}) H_1\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}|}{2 r_1(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \boldsymbol{x} \Bigg), ..., \\ &\quad H_m^{-1}\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_m(\boldsymbol{x}) H_m\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_m}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}|}{2 r_m(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \boldsymbol{x} \Bigg) \Bigg).\end{aligned} \tag{83}$$

Proof. Since F is convex in each variable on $[0, \infty)$, it follows from (81) and (82) that

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{b}} \Big(\sum_{i=1}^{m} D_i F(|f_1(\mathbf{x})|, ..., |f_m(\mathbf{x})|) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Big) \Delta \mathbf{x} \\ &\le 2F\Bigg(\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_1}(\boldsymbol{x}) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Delta \mathbf{x}, ..., \frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_m}(\boldsymbol{x}) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Delta \mathbf{x} \Bigg).\end{aligned} \tag{84}$$

By Jensen's inequality [22], we obtain

$$H_i\Bigg(\frac{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}}|}{2 r_i(\boldsymbol{x})} r_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x}}{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x}} \Bigg) \le \frac{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) H_i\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}}|}{2 r_i(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \mathbf{x}}{\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x}}$$

for all $i = 1, ..., m$, which in view of $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x} = 1$ and the increasing nature of $H_i, i = 1, ..., m$, we get

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x}) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Delta \mathbf{x} \\ &\le H_i^{-1}\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} r_i(\boldsymbol{x}) H_i\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}}|}{2 r_i(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \mathbf{x} \Bigg).\end{aligned} \tag{85}$$

Since F is increasing in each variable on $[0, \infty)$, (85), and (84) we have (83). □

Corollary 7. *If* $f_i \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^1([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], 1) \cap \mathcal{L}_{\boldsymbol{b}}^1([\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})], 1)$ *for all* $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$*, where* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] \cup [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})]$ *for some* $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{b})$*, then*

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{b}} \Big(\sum_{i=1}^{m} |f_i(\boldsymbol{x})| \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \Big| \Big) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\le \sum_{i=1}^{m} C_i \Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} s_i(\boldsymbol{x}) \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x}) \Big| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \Big|^{p} \Delta \boldsymbol{x} \Bigg)^{2/p_i},\end{aligned} \tag{86}$$

where $C_i = \frac{1}{4}(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{b})} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{t}) \lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{t}) s_i^{1/(1-p_i)}(\boldsymbol{t}) \Delta \boldsymbol{t})^{2(p_i-1)/p_i}$*,* $s_i(\boldsymbol{x}) \ge 0, i = 1, ..., m.$

Proof. In Theorem 11, if $F(t_1, ..., t_m) = t_1^2/2 + \cdots + t_m^2/2$, and

$$H_i(t) = t^{p_i}, p_i \geq 1, \quad r_i(\boldsymbol{x}) = \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x})\lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{x})s_i^{1/(1-p_i)}(\boldsymbol{x})(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{\sigma(b)}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{t})\lambda_{\boldsymbol{\eta}_i}(\boldsymbol{t})s_i^{1/(1-p_i)}(\boldsymbol{t})\Delta\boldsymbol{t})^{-1},$$

for $i = 1, ..., m$, then (83) becomes (86). □

Remark 8. *Let $m = n = 1, p \geq 1$. Then* (86) *becomes a version of Maroni's inequality on time scales with endpoints are generalized zeros: if $f \in \mathcal{L}_a^1([a, c], 1) \cap \mathcal{L}_b^1([c, \sigma(b)], 1)$ for $\sigma(a) < c < b$, then*

$$\int_{\sigma(a)}^{b} |f(x)f^{\Delta}(x)|\Delta x \leq C\bigg(\int_a^{\sigma(b)} s(x)\chi_{\xi}(x)\lambda_{\eta}(x)|f^{\Delta}(x)|^p\Delta x\bigg)^{2/p}, \tag{87}$$

where $C = \frac{1}{4}(\int_a^{\sigma(b)} \chi_{\xi}(t)\lambda_{\eta}(t)s^{1/(1-p)}(t)\Delta t)^{2(p-1)/p}$ and $s(x) > 0$ on $[\sigma(a), b]$.

Moreover, if $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, then (87) *improves and generalizes Maroni's inequality [12].*

Next, for $0 < R \leq \infty$, we denote by $\mathcal{G}_R^{1,m}$ the class of all functions $G : (-R, R)^m \to \mathbb{R}$ satisfying the following conditions:

(i) $G \in C^1((-R, R)^m)$,

(ii) $G(0, ..., 0) = 0$, and

(iii) if $x_i \leq y_i^{1/p}z_i^{1/q}, 0 < x_i, y_i, z_i < R$ for $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, then

$$0 \leq D_iG(x_1, ..., x_m) \leq [D_iG(y_1, ..., y_m)]^{1/p}[D_iG(z_1, ..., z_m)]^{1/q},$$

where p, q are conjugate exponents $1/p + 1/q = 1$.

Remark 9. *If $G \in \mathcal{G}_R^{1,m}$, then $G \in \mathcal{H}_R^m$.*

Proof. Let $G \in \mathcal{G}_R^{1,m}$. For each $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ and $0 < x_i \leq y_i < R$, from (iii) we have

$$\begin{aligned} 0 \leq D_iG(x_1, ..., x_i, ..., x_m) &\leq [D_iG(y_1, ..., y_i, ..., y_m)]^{1/p}[D_iG(y_1, ..., y_i, ..., y_m)]^{1/q} \\ &= D_iG(y_1, ..., y_i, ..., y_m). \end{aligned}$$

Therefore, $G \in \mathcal{H}_R^m$. □

Example 10. The functions $G(x_1, ..., x_m) = |x_1|^{\gamma_1}\text{sign}(x_1)\cdots|x_m|^{\gamma_m}\text{sign}(x_m)$, $H(x_1, ..., x_m) = |x_1|^{\gamma_1} + \cdots + |x_m|^{\gamma_m}$ for $\gamma_i \geq 1$ for all $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, and $K(x_1, ..., x_m) = e^{x_1-1}\cdots e^{x_m-1}$ are in $\mathcal{G}_{\infty}^{1,m}$.

From on now, we always assume that $\alpha, \beta > 0$ and $\alpha + \beta > 1$ and $G \in \mathcal{G}_R^{1,m}$. We have the following result.

Theorem 11. *Let $H_i, i = 1, ..., m$ be convex increasing functions on $[0, \infty)$, $r_i(\boldsymbol{x}) > 0, i = 1, ..., m$ on $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ and $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r_i(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} = 1$, $\omega_i, \tau_i, \in \mathcal{W}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}])$, and $f_i : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] \to (-R, R)$ be such that*

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{x})\Delta \boldsymbol{x} < R \quad \textit{for} \quad i \in [1, m]_{\mathbb{N}}.$$

If $f_i \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^{\alpha+\beta}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \tau_i)$ for all $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$ and

$$K^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} := \left[\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} [D_i G(V_1(\boldsymbol{x}), ..., V_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \omega_i^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \tau_i^{-\frac{\alpha}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \right) \Delta \boldsymbol{x} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \tag{88}$$

is finite, where

$$V_i(\boldsymbol{x}) := \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) (\tau_i(\boldsymbol{t}))^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \Delta \boldsymbol{t}$$

for $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]$, $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, then

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} [D_i G(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|)]^{\alpha} \left| \frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}} \right|^{\alpha} \omega_i(\boldsymbol{x}) \right) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\leq K^{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})} \Bigg[G\Bigg(H_1^{-1}\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r_1(\boldsymbol{x}) H_1\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_1(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}}|^{\alpha+\beta} \tau_1(\boldsymbol{x})}{r_1(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \boldsymbol{x} \Bigg), ..., \\ &H_m^{-1}\Bigg(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r_m(\boldsymbol{x}) H_m\Bigg(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) |\frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_m(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{1}}}|^{\alpha+\beta} \tau_m(\boldsymbol{x})}{r_m(\boldsymbol{x})} \Bigg) \Delta \boldsymbol{x} \Bigg) \Bigg) \Bigg]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}. \end{aligned} \tag{89}$$

Proof. For any $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]$ and all $i \in [1, m]_{\mathbb{N}}$, we have

$$|f_i(\boldsymbol{x})| \leq \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_i(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{1}}} \right| \Delta \boldsymbol{t}. \tag{90}$$

Applying Hölder's inequality with indices $(\alpha + \beta)/(\alpha + \beta - 1)$ and $(\alpha + \beta)$ to (90), we get

$$\begin{aligned} |f_i(\boldsymbol{x})| &\leq \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) (\tau_i(\boldsymbol{t}))^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \Delta \boldsymbol{t} \right)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}} \\ &\quad \times \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_i(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{t}) \Delta t \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ &=: \Big(V_i(\boldsymbol{x}) \Big)^{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}} \Big(U_i(\boldsymbol{x}) \Big)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \end{aligned} \tag{91}$$

where

$$U_i(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\boldsymbol{1}} f_i(\boldsymbol{t})}{\Delta \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{t}) \Delta t, \quad \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}], \quad i \in [1, m]_{\mathbb{N}}.$$

Thus, since $G \in \mathcal{G}_R^{1,m}$ from (91) we obtain

$$D_i G(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|) \leq [D_i G(V_1(\boldsymbol{x}), ..., V_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha+\beta-1}{\alpha+\beta}} \times [D_i G(U_1(\boldsymbol{x}), ..., U_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{1}{\alpha+\beta}};$$

hence

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} & [D_i G(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|)]^{\alpha} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha} \omega_i(\boldsymbol{x}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} [D_i G(V_1(\boldsymbol{x}), ..., V_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{\alpha+\beta}} \\ &\quad \times [D_i G(U_1(\boldsymbol{x}), ..., U_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha} \omega_i(\boldsymbol{x}).\end{aligned} \tag{92}$$

By applying Hölder's inequality for sum with indices $(\alpha+\beta)/\beta$ and $(\alpha+\beta)/\alpha$ to (92), we get

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} & [D_i G(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|)]^{\alpha} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha} \omega_i(\boldsymbol{x}) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{m} [D_i G(V_1(\boldsymbol{x}), ..., V_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \omega_i^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \tau_i^{-\frac{\alpha}{\beta}}(\boldsymbol{x})\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\ &\quad \times \left(\sum_{i=1}^{m} D_i G(U_1(\boldsymbol{x}), ..., U_m(\boldsymbol{x})) \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{x})\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.\end{aligned} \tag{93}$$

Integrating both sides of (93) with respect to $\boldsymbol{x}$ over $[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{c}]$ and using Hölder's inequality with indices $(\alpha+\beta)/\beta$ and $(\alpha+\beta)/\alpha$ give

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} & \left(\sum_{i=1}^{m} [D_i G(|f_1(\boldsymbol{x})|, ..., |f_m(\boldsymbol{x})|)]^{\alpha} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha} \omega_i(\boldsymbol{x})\right) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\leq \left[\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} [D_i G(V_1(\boldsymbol{x}), ..., V_m(\boldsymbol{x}))]^{\frac{\alpha(\alpha+\beta-1)}{\beta}} \omega_i^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \tau_i^{-\frac{\alpha}{\beta}}(\boldsymbol{x})\right) \Delta \boldsymbol{x}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\ &\quad \times \left[\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\sum_{i=1}^{m} D_i G(U_1(\boldsymbol{x}), ..., U_m(\boldsymbol{x})) \frac{\partial^{\mathbf{1}} U_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right) \Delta \boldsymbol{x}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.\end{aligned} \tag{94}$$

By Theorem 4,

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} & \left(\sum_{i=1}^{m} D_i G(U_1(\boldsymbol{x}), ..., U_m(\boldsymbol{x})) \frac{\partial^{\mathbf{1}} U_i(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}}\right) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\leq G\left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_1}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_1(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x}, ..., \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_m}(\boldsymbol{x}) \left|\frac{\partial^{\mathbf{1}} f_m(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}}\right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{x}\right).\end{aligned} \tag{95}$$

It follows from Jensen's inequality [22] and $H_i, i = 1, ..., m$ are increasing on $[0, \infty)$, that

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\boldsymbol{x}) \Delta \mathbf{x} \\ &\leq H_i^{-1} \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r_i(\boldsymbol{x}) H_i \left(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}_i}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f_i(\mathbf{x})}{\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau_i(\mathbf{x})}{r_i(\boldsymbol{x})} \right) \Delta \mathbf{x} \right) \right). \end{aligned} \tag{96}$$

Since G is increasing in each variable on $[0, \infty)$ and (95), and (96), we obtain (89). This concludes the proof. □

When $m = 1, G(x) = |x|^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}$ we have the following corollary.

Corollary 12. *Let H be a convex increasing function on $[0, \infty)$, $r(\boldsymbol{x}) > 0$ on $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ and $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} = 1$, $\omega, \tau, \in \mathcal{W}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}])$, and $f : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] \to (-R, R)$ be such that*

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} < R.$$

If $f \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^{\alpha+\beta}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \tau)$ and

$$K_1 := \left[\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) (\tau(\boldsymbol{t}))^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \Delta \boldsymbol{t} \right)^{\alpha+\beta-1} \omega^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \tau^{-\frac{\alpha}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

is finite, then

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} |f(\boldsymbol{x})|^{\beta} \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha} \omega(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} K_1 H^{-1} \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} r(\boldsymbol{x}) H \left(\frac{\chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau(\boldsymbol{x})}{r(\boldsymbol{x})} \right) \Delta \boldsymbol{x} \right). \end{aligned}$$

We examine Corollary 12 further in the case when $H(t) = t$. We obtain the following corollary.

Corollary 13. *Let $\omega, \tau, \in \mathcal{W}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}])$, and $f : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}] \to (-R, R)$ be such that*

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} < R.$$

If $f \in \mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}^{\alpha+\beta}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \tau)$ and

$$K_1 := \left[\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} \left(\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) (\tau(\boldsymbol{t}))^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \Delta \boldsymbol{t} \right)^{\alpha+\beta-1} \omega^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \tau^{-\frac{\alpha}{\beta}}(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

is finite, then

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{a})}^{\boldsymbol{c}} |f(\boldsymbol{x})|^{\beta} \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha} \omega(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x} \\ \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} K_1 \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}} \chi_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) \left| \frac{\partial^{\mathbf{1}} f(\boldsymbol{x})}{\Delta \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}}} \right|^{\alpha+\beta} \tau(\boldsymbol{x}) \Delta \boldsymbol{x}. \tag{97}$$

Remark 14. From Corollary 13 we obtain many known results:

1. If $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $n = 2$ and $f(\boldsymbol{x})|x_1 = a_1 = f(\boldsymbol{x})|x_2 = a_2 = 0$, then inequality (97) imply the result of Pachpatte given in [14, Theorem 1].

2. Inequality (97) is the same as the ones given in [18, Theorems 2.4] if we take $f(a) = 0$, $n = 1$.

Remark 15. Note that when $n = \alpha = 1, \beta = p - 1$, for $p > 1$, $m = 2, H_1(t) = H_2(t) = t, G(x_1, x_2) = |x_1 x_2|$, $f_1(a) = f_2(a) = 0, \omega_1 = \psi^{\sigma}$, $\tau_1 = \phi[\psi^{\sigma}]^{p/2}$, where $\phi, \psi \in \mathcal{W}([a, c]_{\mathbb{T}})$ and ψ is decreasing on $[a, c]_{\mathbb{T}}$, we see that inequality (89) improves and generalizes [23, Theorem 3.1].

REFERENCES

1. R. P. Agarwal, M. Bohner, A. Peterson, *Inequalities on time scales: A survey*. Math. Inequal. Appl. **4**, 535-557 (2001).
2. R. P. Agarwal, D. O'regan, S. H. Saker, Dynamic Inequalities on Time Scales. *Springer*, Switzerland (2014).
3. M. Andrić, A. Barbir, J. Pečarić, *Generalizations of Opial-type inequalities in several independent variables*. Demonstratio Math. **XLVII**, 839-847 (2014).
4. M. Bohner, A. Peterson, Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications. *Birkhäuser*, Boston (2001).
5. M. Bohner, A. Peterson, (Eds): Advances in Dynamic Equations on Time Scales. *Birkhäuser*, Boston (2003).
6. M. Bohner, B. Kaymakçalan, *Opial inequalities on time scales*. Ann. Polon. Math. **77**, 11-20 (2001).
7. I. Brnetić, J. Pečarić, *Note on the generalization of the Godunova-Levin-Opial type inequality in several independent variables*. J. Math. Anal. Appl. **215**, 545-549 (1997).
8. E. K. Godunova, V. I. Levin, *On an inequality of Maroni*. Mat. Zametki. **2**, 221-224 (1967).
9. S. Hilger, *Analysis on measure chains-a unified approach to continuous and discrete calculus*. Results Math. **18**, 18-56 (1990).
10. B. Karpuz, B. Kaymakçalan, Ö. Öcalan, *A generalization of Opial's inequality and applications to second-oder dynamic equations*. Diff. Equa. Dyn. Sys. **18**, 11-18 (2010)
11. L. Li, M. Han, *Some new dynamic Opial type inequalities and applications for second order integro-differential dynamic equations on time scales*. Appl. Math. Comput. **232**, 542-547 (2014)
12. P. M. Maroni, *Sur l'inégalité d'Opial-Beesack*. C. R. Acad. Sci. Paris. **A 264**, 62-64 (1967).
13. Z. Opial, *Sur une inégalité*. Ann. Polon. Math. **8**, 29-32 (1960).

14. B. G. Pachpatte, *On two independent variable Opial-type integral inequalities*. J. Math. Anal. Appl. **125**, 47-57 (1987).
15. B. G. Pachpatte, *Some inequalities similar to Opial inequality*. Demonstratio Math. **26**, 643-647 (1993).
16. J. Pečarić, *An integral inequality*. Hadronic Press, Palm Harbor, FL. 471-478 (1993).
17. T. D. Phung, *Some inequalities for partial derivatives on time scales*, Acta Mathematica Vietnamica, accepted.
18. S. H. Saker, *Some Opial-type inequalities on time scales*. Abstr. Appl. Anal. Vol. 2011, Art. no. 265316, 19 pages (2011).
19. S. H. Saker, *Some Opial dynamic inequalities involving higher order derivatives on time scales*: Discrete Dyn. Nature Soc. Vol. 2012, Article ID 157310, 22 pages (2012).
20. S. H. Saker, M. M. Osman, D. O'regan, R. P. Agarwal, *Some new Opial dynamic inequalities with weight functions on time scales*. Math. Inequal. Appl. **18**, 1171-1187 (2015).
21. H. M. Srivastava, K. L. Tseng, S. J. Tseng, J. C. Lo, *Some weighted Opial-type inequalities on time scales*. Taiwanese J. Math. **14**, 107-122 (2010).
22. F. H. Wong, C. C. Yeah, W. C. Lian, *An extension of Jensen's inequality on time scales*. Advn. Dynm. Sys. Appl. **1**, 113-120 (2006).
23. L. Yin, C. Zhao, *Some new generalizations of Maroni inequality on time scales*. Demonstratio Math. **XLVI**, 645-654 (2013).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.61-70

NỬA NHÓM MẠNH HẦU KHẮP VÀ NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRÊN KHÔNG GIAN HILBERT

MAI THÀNH TẤN[1*] VÀ LÊ QUANG THUẬN[2]
Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, Quy Nhơn, Bình Định.
*Email: maithanhtan@qnu.edu.vn

TÓM TẮT

Chúng tôi nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình vi phân trên các không gian Hilbert trên cơ sở xây dựng khái nhiệm nửa nhóm toán tử mạnh hầu khắp nơi cho hệ phụ thuộc thời gian. Việc nghiên cứu này bắt nguồn từ một bài toán phương trình đạo hàm riêng được đặt ra trong toán công nghiệp.

Từ khóa: Phương trình đạo hàm riêng, Nghiệm yếu

ABSTRACT

We analyze weak solutions of differential equations with time dependent parameters in Hilbert spaces base on construction the concept almost strong semigroups of linear operators. It is also applied to a partial differential equation arising in industrial mathematics.

1 Giới thiệu

Giả sử H là không gian Hilbert tách được và $L(t) : D(L(t)) \subset H \to H$, $t \in [t_0, T]$ là họ các toán tử tuyến tính đóng, xác định trù mật trên H (tức là tập xác định $D(L(t))$ của $L(t)$ là tập trù mật trong H). Xét bài toán Cauchy tổng quát sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) &= L(t)u(t) + F(t) \quad 0 \le t_0 \le t \le T, \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases} \tag{98}$$

với $F(t)$ là hàm liên tục giá trị trong H, $u_0 \in H$.

Bài toán (138) là sự tổng quát hóa bài toán Cauchy cho các phương trình tuyến tính trên không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$. Việc giải các phương trình vi phân tuyến tính (138) dẫn đến việc nghiên cứu lý thuyết nửa nhóm các toán tử trên các không gian vô hạn chiều tương ứng. Về lý thuyết nửa nhóm toán tử cũng như bài toán Cauchy tổng quát có thể tham khảo chi tiết trong [7], trong đó, tác giả giới thiệu chi tiết các kết quả cơ bản về nghiệm cổ điển, nghiệm "mild" của các phương trình với hệ số không phụ thuộc thời gian (tức là $L(t) = L(t_0)$ với mọi $t \ge t_0$) và hệ số phụ thuộc thời gian. Trong [2], tác giả giới thiệu nghiệm yếu cho hệ parabolic phụ thuộc thời gian; J. M. Ball trong [?] nghiên cứu nghiệm yếu cho hệ không phụ thuộc thời gian. Nghiệm yếu trong các công trình trên được xây dựng dựa trên các nửa nhóm toán tử liên tục mạnh hoặc các hệ tiến hóa liên tục mạnh trên các không gian vô hạn chiều tương ứng.

Ngày nhận bài: 15/9/2015 ; ngày nhận đăng: 21/6/2016

Việc nghiên cứu của chúng tôi bắt nguồn từ một bài toán công nghiệp. Trong đó, chúng tôi nghiên cứu nghiệm yếu của phương trình vi phân với hệ phụ thuộc thời gian dựa trên các hệ tiến hóa liên tục mạnh hầu khắp nơi (nửa nhóm hầu mạnh).

Tiếp theo phần giới thiệu, bài báo xây dựng khái niệm nửa nhóm mạnh hầu khắp và mối liên quan với các nửa nhóm mạnh cũng như điều kiện tồn tại của các nửa nhóm mạnh hầu khắp. Khái niệm nghiệm yếu cũng được nhắc lại và chúng tôi đưa ra điều kiện tồn tại nghiệm yếu của phương trình vi phân dựa trên nửa nhóm mạnh hầu khắp tương ứng. Cuối cùng, chúng tôi xét một bài toán phương trình đạo hàm riêng tuyến tính như là một áp dụng cho các khái niệm trên.

2 Nghiệm yếu và nửa nhóm mạnh hầu khắp

Giả sử $\big(L(t), D(L(t))\big)_{0\leq t\leq T}, 0 < T < \infty$, là một họ các toán tử đóng, xác định trù mật trên không gian Banach H sao cho với mỗi $t \in [0, T]$, $\big(L(t), D(L(t))\big)$ là phần tử sinh của một C_0-nửa nhóm $(S_t(\tau))_{\tau\geq 0}$ trên H. Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số kết quả chính về sự tồn tại và tính duy nhất của nửa nhóm hai tham số $(U(t, \tau))_{0\leq\tau\leq t\leq T}$ ứng với họ các toán tử được cho trước $\big(L(t), D(L(t))\big)_{0\leq t\leq T}$, trên cơ sở đó, chúng tôi xây dựng khái niệm nửa nhóm toán tử (hai tham số) mạnh hầu khắp và nghiệm yếu của phương trình vi phân. Với mỗi $t \in [0, T]$ kí hiệu $\|\cdot\|_{D(L(t))}$ là chuẩn toán tử trên $D(L(t))$. Lưu ý rằng $\big(D(L(t)), \|\cdot\|_{D(L(t))}\big)$ là không gian Banach nếu $\big(L(t), D(L(t))\big)$ là toán tử đóng.

Xét bài toán Cauchy tổng quát trên không gian Banach H như sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) & = L(t)u(t) + F(t) \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T, \\ u(t_0) & = u_0, \end{cases}$$

với $F(t)$ là hàm liên tục giá trị trong H, $u_0 \in H$.

Định nghĩa 1. Hàm $u : [t_0, T] \longrightarrow H$ được gọi là một nghiệm cổ điển của phương trình (138) nếu u liên tục trên đoạn $[t_0, T]$, $u(t) \in D(L(t))$ với $t_0 < t \leq T$, u khả vi liên tục trên $(t_0, T]$ và thỏa phương trình (138).

Trong phần này, đạo hàm riêng theo biến x, với x là biến thực, được kí hiệu bởi ∂_x. Các đạo hàm bên phải, đạo hàm bên trái được kí hiệu lần lượt là ∂_x^+ và ∂_x^-. Các đạo hàm bậc cao hơn được kí hiệu bởi ∂_{xx}, ∂_{xxx}, $\cdots$.

Định nghĩa 2. Giả sử H là một không gian Banach. Một họ hai tham số các toán tử tuyến tính bị chặn $(U(t, \tau))_{0\leq\tau\leq t\leq T}$ trên H được gọi là một *hệ tiến hóa* (một *nửa nhóm hai tham số*), nếu thỏa mãn

(i) $U(t, t) = Id$, $U(t, r)U(r, \tau) = U(t, \tau)$ với mọi $0 \leq \tau \leq r \leq t \leq T$;

(ii) $(t, \tau) \longmapsto U(t, \tau)$ liên tục mạnh trên $0 \leq \tau \leq t \leq T$.

Ví dụ 3. [7, Theo. 5.5.1 và Theo. 5.5.2] Giả sử H là không gian Banach và bài toán Cauchy tuyến tính thuần nhất sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = L(t)u(t), \quad \tau \leq t \leq T, \\ u(\tau) = u_0 \in H, \quad \tau \geq 0 \end{cases} \tag{99}$$

có duy nhất nghiệm cổ điển

$$u_{\tau,u_0}(t) = u_0 + \int_\tau^t L(r)u_{\tau,u_0}(r)dr$$

trên H. Khi đó, họ các toán tử $U(t,\tau)(\cdot) := u_{\tau,\cdot}(t), 0 \leq \tau \leq t \leq T$ là một hệ tiến hóa trên H. Hơn nữa, hệ tiến hóa $(U(t,\tau))_{0\leq\tau\leq t\leq T}$ thỏa mãn

$$(i)\ \frac{\partial}{\partial t}U(t,\tau) = L(t)U(t,\tau) \quad \text{với mọi } 0 \leq \tau \leq t \leq T, \tag{100}$$

$$(ii)\ \frac{\partial}{\partial \tau}U(t,\tau) = -U(t,\tau)L(\tau) \quad \text{với mọi } 0 \leq \tau \leq t \leq T. \tag{101}$$

Hệ các toán tử $(U(t,\tau))_{0\leq\tau\leq t\leq T}$ như trên được gọi là hệ tiến hóa (nửa nhóm hai tham số) các toán tử tuyến tính liên kết với họ $(L(t))_{0\leq t\leq T}$ (hoặc liên kết với phương trình (99)). Tuy nhiên, điều kiện về sự tồn tại và duy nhất nghiệm cổ điển của phương trình (99) thường rất nghiêm ngặt. Chẳng hạn như, nếu $(L(t))_{0\leq t\leq T}$ là họ các toán tử tuyến tính bị chặn trên không gian H và hàm $[0,T] \ni t \longmapsto L(t) \in (L(H), \|\cdot\|_{L(H)})$ liên tục, thì phương trình (99) có duy nhất nghiệm cổ điển với mọi $h \in H$, xem [7, Theo. 5.5.1]. Trong đó, $(L(H), \|\cdot\|_{L(H)})$ là không gian Banach các toán tử tuyến tính liên tục trên H với chuẩn toán tử.

Trong ứng dụng, nghiệm của bài toán Cauchy tổng quát thường được xây dựng dựa trên hệ tiến hóa mạnh liên kết với hệ các toán tử tuyến tính tương ứng cùng với các tính chất đạo hàm riêng của chúng như (100) và (101). Tuy nhiên, trong một số trường hợp, các điều kiện để thỏa mãn (100) và (101), hoặc tính liên tục mạnh của họ $U(t,\tau)$ theo biến (t,τ) là rất nghiêm ngặt. Chúng tôi giới thiệu một khái niệm khác, nhiều tiện lợi hơn trong việc xây dựng nghiệm yếu của phương trình vi phân, đó là *hệ tiến hóa mạnh hầu khắp*.

Kể từ đây, ta luôn giả sử họ các toán tử $(L(t))_{t_0\leq t\leq T}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

Giả thiết 4. (i) $L(t) : D(L(t)) \subset H \longrightarrow H, t \in [t_0,T]$, là họ các toán tử đóng, xác định trù mật trên H.

(ii) $\mathcal{D} := \bigcap_{t\in[t_0,T]} D(L(t))$ và $\mathcal{D}^* := \bigcap_{t\in[t_0,T]} D(L^*(t))$ là các tập trù mật trong H.

Định nghĩa 5. Giả sử $\big(L(t), D(L(t))\big)_{0\leq t\leq T}$ là họ các toán tử đóng, xác định một cách trù mật trên H sao cho $\mathcal{D} := \cap_{0\leq t\leq T} D(L(t))$ trù mật trong H. Một họ $(U(t,\tau))_{0\leq\tau\leq t\leq T}$ các toán tử tuyến tính bị chặn trên H được gọi là hệ tiến hóa mạnh hầu khắp (*almost strong evolution system*) tương ứng với họ $\big(L(t), D(L(t))\big)_{0\leq t\leq T}$ với không gian đầu $Y \subset \mathcal{D} \subset H$, trù mật trong H, nếu các điều kiện sau thỏa mãn:

(i) $U(t,t) = Id$ với mọi $t \in [0,T]$, và $U(t,r)U(r,\tau) = U(t,\tau)$ với mọi $0 \le \tau \le r \le t \le T$.

(ii) $[\tau,T] \ni t \mapsto U(t,\tau)u \in H$, $[0,t] \ni \tau \mapsto U(t,\tau)u \in H$ liên tục với mọi $u \in H$ và với mọi $0 \le \tau \le t \le T$ và $\sup_{0\le\tau\le t\le T} \|U(t,\tau)\| < \infty$.

(iii) $U(t,\tau)(Y) \subset D(L(t))$ với mọi $0 \le \tau < T$, $t \in [\tau,T]$ hầu khắp, và

$$\int_\tau^t L(r)U(r,\tau)u dr = U(t,\tau)u - u \quad \text{với mọi } u \in Y,\ 0 \le \tau \le t \le T. \tag{102}$$

Ta nói họ $\big(L(t), D(L(t))\big)_{0\le t\le T}$ là họ sinh của hệ tiến hóa mạnh hầu khắp $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$.

Nhận xét 6. *(i) Nếu $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$ thỏa mãn Định nghĩa 5 (iii), thì $U(\cdot,\tau)u$ khả vi hầu khắp nơi trên $[\tau,T]$ với mọi $u \in Y$ và $\partial_t U(t,\tau)u = L(t)U(t,\tau)u$ hầu khắp $t \in [\tau,T]$.*

(ii) Hệ tiến hóa như trong [3, Theo. 1] hoặc [7, Theo. 5.4.3] là hệ tiến hóa mạnh hầu khắp.

Với các hệ tiến hóa mạnh hầu khắp, việc nghiên cứu các nghiệm yếu của bài toán Cauchy trên các không gian Hilbert có nhiều tiện lợi. Kể từ đây, ta xét H là không gian Hilbert tách được. Xét bài toán Cauchy trên H như sau

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = L(t)u(t) + F(t), & 0 \le t_0 \le t \le T, \\ u(t_0) = u_0 \in H, \end{cases} \tag{103}$$

với $(L(t), D(L(t)))_{\tau\le t\le T}$ như trong Giả thiết 4 và $F \in C([t_0,T],H)$.

Định nghĩa 7. Hàm $u \in C([t_0,T],H)$ được gọi là một *nghiệm yếu* của (103) nếu với mọi $h \in \mathcal{D}^*$ ta có

$$\langle u(t), h\rangle = \langle u_0, h\rangle + \int_{t_0}^t \langle u(r), L^*(r)h\rangle\, dr + \int_{t_0}^t \langle F(r), h\rangle\, dr. \tag{104}$$

Nhận xét 8. *(i) Giả sử $(U(t,\tau)_{0\le t_0\le\tau\le t\le T}$ là hệ tiến hóa thỏa mãn*

$$\partial_t U(t,t_0)u_0 = L(t)U(t,t_0)u_0,\ u_0 \in Y,\ t \in [t_0,T].$$

Vì các hàm $[\tau,T] \ni t \longmapsto U(t,\tau)u_0 \in Y,\ u_0 \in Y$ và $[0,T] \ni t \longmapsto L(t) \in L(Y,H)$ liên tục nên suy ra hàm $[t_0,T] \ni t \mapsto U(t,t_0)u_0 \in H$ khả vi liên tục. Do đó, suy ra $U(t,\tau)u_0$ là một nghiệm yếu của (103).

(ii) Trường hợp $L(t) = L(t_0)$ với mọi $t \in [t_0,T]$, mỗi nghiệm mild của phương trình (103) $u(t) = S(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t S(t-r)F(r)\,dr$ cũng là nghiệm yếu, với $S(t-t_0)_{t\ge t_0}$ là C_0-nửa nhóm sinh bởi $L(t_0)$. Thật vậy, vì $(S(t-t_0))_{t\ge t_0}$ là nửa nhóm sinh bởi $L(t_0)$ trên không gian phản xạ H nên $(S^*(t-t_0))_{t\ge t_0}$ cũng là nửa nhóm trên H với phần tử sinh là $L^*(t_0)$. Kết hợp với Định lí

Fubini's, với mọi $h \in \mathcal{D}^*(= D(L^*(t_0)))$ ta có

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \langle u(r), L^*(t_0)h\rangle\, dr &= \int_{t_0}^t \langle S(r-t_0)u_0, L^*(t_0)h\rangle\, dr \\
&\qquad + \int_{t_0}^t \Big\langle \int_{t_0}^r S(r-\tau)F(\tau)d\tau, L^*(t_0)h\Big\rangle\, dr \\
&= \int_{t_0}^t \langle u_0, S^*(r-t_0)L^*(t_0)h\rangle\, dr + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \big\langle F(\tau), \mathbf{1}_{[t_0,r]}S^*(r-\tau)L^*(t_0)h\big\rangle\, d\tau dr \\
&= \int_{t_0}^t \langle \partial_r S(r-t_0)u_0, h\rangle\, dr + \int_{t_0}^t \int_{\tau}^t \big\langle F(\tau), S^*(r-\tau)L^*(t_0)h\big\rangle\, dr d\tau \\
&= \langle S(t-t_0)u_0, h\rangle - \langle u_0, h\rangle + \Big\langle \int_{t_0}^t S(t-\tau)F(\tau)\, d\tau, h\Big\rangle - \int_{t_0}^t \langle F(\tau), h\rangle\, d\tau \\
&= \langle u(t), h\rangle - \langle u_0, h\rangle - \int_{t_0}^t \langle F(r), h\rangle\, dr.
\end{aligned}$$

Do vậy, với mọi $h \in \mathcal{D}^*$ và $t \in [t_0, T]$ ta có

$$\langle u(t), h\rangle = \langle u_0, h\rangle + \int_{t_0}^t \langle u(r), L^*(t_0)h\rangle\, dr + \int_{t_0}^t \langle F(r), h\rangle\, dr.$$

Do đó, nghiệm mild của (103) cũng đồng thời là nghiệm yếu.

(iii) *Nghiệm yếu của bài toán Cauchy trong trường hợp hệ các toán tử phụ thuộc thời gian đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong trường hợp họ các toán tử $L(t)$ là sectorial, đều theo $t \in [t_0, T]$. Tiêu biểu là các kết quả trong [2, Section 7.3]. Tuy nhiên, trong một số bài toán ứng dụng, họ các toán tử $(L(t))_{t\geq 0}$ là không sectorial.*

Định lý 9. *Giả sử $(U(t,\tau))_{0\leq t_0\leq \tau\leq t\leq T}$ là hệ tiến hóa mạnh hầu khắp trên H ứng với họ các toán tử tuyến tính $(L(t), D(L(t)))_{t_0\leq t\leq T}$ và Y như trong Định nghĩa 5. Giả sử ánh xạ $[t_0, T] \ni t \mapsto L^*(t)h \in H$ đo được, bị chặn với mọi $h \in \mathcal{D}^*$. Khi đó, với mọi $u_0 \in H$, $u(t) := U(t, t_0)u_0$ là nghiệm yếu của phương trình thuần nhất tương ứng với (103).*

Chứng minh. Với mọi $u_0 \in Y$, theo Định nghĩa 5(ii), ánh xạ $[t_0, T] \ni t \longmapsto U(t, t_0)u_0 \in H$ liên tục. Mặt khác, theo giả thiết, ánh xạ $[t_0, T] \ni t \mapsto L^*(t)h \in H$ đo được và bị chặn với mọi $h \in \mathcal{D}^*$. Do đó, tích phân $\int_{t_0}^t \langle U(r, t_0)u_0, L^*(r)h\rangle\, dr$ hữu hạn với mọi $t \in [t_0, T]$. Theo Định nghĩa 5(iii), với mọi $h \in \mathcal{D}^*$ ta có

$$\int_{t_0}^t \langle U(r, t_0)u_0, L^*(r)h\rangle\, dr = \int_{t_0}^t \langle L(r)U(r, t_0)u_0, h\rangle\, dr = \langle U(t, t_0)u_0, h\rangle - \langle u_0, h\rangle.$$

Do đó,

$$\langle U(t, t_0)u_0, h\rangle = \langle u_0, h\rangle + \int_{t_0}^t \langle U(r, t_0)u_0, L^*(r)h\rangle\, dr \quad \text{với mọi } h \in \mathcal{D}^*. \tag{105}$$

Với $u_0 \in H$, do tính trù mật của Y trong H, chọn dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trong Y sao cho $\lim_{n\to\infty} u_n =$

u_0. Áp dụng (105) cho $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ta được

$$\langle U(t,t_0)u_n, h\rangle = \langle u_n, h\rangle + \int_{t_0}^{t} \langle U(r,t_0)u_n, L^*(r)h\rangle\, dr \quad \text{với mọi } h \in \mathcal{D}^*, n \in \mathbb{N}. \tag{106}$$

Vì $\|L^*(r)h\|_H$ bị chặn trên $[0,T]$ và $(U(r,t_0))_{0\le t_0\le r\le t}$ là họ các toán tử tuyến tính bị chặn trên H nên theo Định lí hội tụ trội của Lebesgue, từ (106) ta suy ra

$$\langle U(t,t_0)u_0, h\rangle = \langle u_0, h\rangle + \int_{t_0}^{t} \langle U(r,t_0)u_0, L^*(r)h\rangle\, dr \quad \text{với mọi } h \in \mathcal{D}^*,$$

hay $[t_0,T] \ni t \longmapsto U(t,t_0)u_0 \in H$ là nghiệm yếu của (103) với mọi $u_0 \in H$. □

Nhận xét 10. *(i) Trường hợp hệ không phụ thuộc thời gian, tức là $L(t) = L(t_0)$ với mọi $t \in [t_0, T]$, phương trình (103) có duy nhất nghiệm yếu khi và chỉ khi toán tử $L(t_0)$ là phần tử sinh của C_0-nửa nhóm trên H. Về chi tiết, xem [1].*

(ii) Trường hợp hệ phụ thuộc thời gian không thuần nhất, việc chứng minh là tương đối phức tạp.

3 Về một bài toán phương trình đạo hàm riêng tuyến tính

Xét bài toán phương trình đạo hàm riêng tuyến tính sau

$$\partial_{tt}\mathbf{x}(s,t) = \partial_s(\lambda\partial_s\mathbf{x})(s,t) - b\partial_{ssss}\mathbf{x}(s,t), \quad (s,t) \in [0,l]\times[0,T], \tag{107}$$

với điều kiện ban đầu

$$\mathbf{x}(s,0) = \mathbf{0}, \quad \partial_t\mathbf{x}(s,0) = \mathbf{0}, \quad s \in [0,l], \tag{108}$$

và điều kiện biên

$$\mathbf{x}(l,t) = \mathbf{0}, \quad \partial_s\mathbf{x}(l,t) = \mathbf{0}, \quad \partial_{ss}\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad \partial_{sss}\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad t \in [0,T]. \tag{109}$$

Phương trình trên bắt nguồn từ bài toán tuyến tính hóa phương trình xác định mô phỏng sợi vải rơi trong công nghiệp dệt, trong đó, $\mathbf{x} : [0,l]\times[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, mô tả sợi vải tại chiều dài cung $s \in [0,l]$ và thời điểm $t \in [0,T]$. Hàm $\lambda : [0,l]\times[0,T] \longrightarrow [0,\infty)$ mô tả các lực cưỡng bức với điều kiện biên $\lambda(0,t) = 0$, $t \in [0,T]$ và hằng số $b > 0$.

Đặt $X(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \partial_t\mathbf{x}(t) \end{pmatrix}$, khi đó

$$\begin{aligned} dX(t) = \begin{pmatrix} \partial_t\mathbf{x}(t) \\ \partial_{tt}\mathbf{x}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_t\mathbf{x}(t)dt \\ \left(\partial_s(\lambda(t)\partial_s\mathbf{x}(t)) - b\partial_{ssss}\mathbf{x}(t)\right) \end{pmatrix} \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 & Id \\ \partial_s(\lambda(t)\partial_s) - b\partial_{ssss} & 0 \end{pmatrix} X(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Do đó, phương trình (107) trở thành

$$dX(t) = L(t)X(t)dt, \tag{110}$$

với

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \tilde{L}(t) & 0 \end{pmatrix}, \tilde{L}(t) = \partial_s(\lambda(t)\partial_s) - b\partial_{ssss}.$$

Kí hiệu $L^2(0,l) := L^2((0,l);\mathbb{R}^3)$ (không gian Hilbert các hàm bình phương khả tích Lebesgue trên khoảng $(0,l)$ với giá trị trong $\mathbb{R}^3$, cùng với tích vô hướng thông thường) và xét các toán tử $\tilde{L}(t) : D(\tilde{L}(t)) \subset L^2(0,l) \longrightarrow L^2(0,l)$ với miền xác định

$$D(\tilde{L}(t)) := \{\mathbf{v} \in H^{4,2}((0,l);\mathbb{R}^3) \big| \mathbf{v} \text{ thỏa mãn (109)}\} =: \mathbf{H}^{\mathbf{4,2}}_{\mathrm{bc}}(\mathbf{0},\mathbf{l})$$

($H^{m,2}((0,l);\mathbb{R}^3)$ kí hiệu không gian Hilbert các hàm giá trị trong $\mathbb{R}^3$, bình phương khả tích trên $(0,l)$ cùng với các đạo hàm yếu cấp m). Đặt

$$H^{2,2}_{\mathrm{bc}}(0,l) := \{\mathbf{u} \in H^{2,2}((0,l);\mathbb{R}^3) \big| \mathbf{u} \text{ thỏa mãn hai điều kiện biên đầu trong (109)}\}.$$

Trong $H^{2,2}((0,l);\mathbb{R}^3)$, xét tích vô hướng được xác định bởi

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}^{\mathbf{2,2}}_{\mathrm{bc}}(\mathbf{0},\mathbf{l})} := \mathbf{b} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{l}} \langle \partial_{\mathbf{ss}}\mathbf{u}, \partial_{\mathbf{ss}}\mathbf{v} \rangle_{\mathrm{euk}} \mathbf{ds},\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\mathbf{2,2}}_{\mathrm{bc}}(\mathbf{0},\mathbf{l}).$$

Xét không gian Hilbert $H := H^{2,2}_{\mathrm{bc}}(0,l) \times L^2(0,l)$ với tích vô hướng

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v_2} \end{pmatrix} \right\rangle_H := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{H^{2,2}_{\mathrm{bc}}(0,l)} + \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle_{L^2(0,l)}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v_2} \end{pmatrix} \in H,$$

và họ các toán tử

$$\begin{aligned} L(t) : D(L(t)) \subset H &\longrightarrow H \\ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \tilde{L}(t)\mathbf{u} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

trong đó $D(L(t)) := H^{4,2}_{\mathrm{bc}}(0,l) \times H^{2,2}_{\mathrm{bc}}(0,l) =: \mathcal{D}$ không phụ thuộc vào $t \in [0,T]$. Xét tích vô hướng trên $\mathcal{D}$ như sau

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v_2} \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{D}} := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{H^{4,2}_{\mathrm{bc}}(0,l)} + \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle_{H^{2,2}_{\mathrm{bc}}(0,l)}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v_2} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}, \tag{111}$$

với $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{H^{4,2}_{\mathrm{bc}}(0,l)} := b^2 \int_0^l \langle \partial_{ssss}\mathbf{u}_1, \partial_{ssss}\mathbf{u}_2 \rangle_{\mathrm{euk}} ds$ với mọi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H^{4,2}_{\mathrm{bc}}(0,l)$. Dễ dàng kiểm tra được $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ là không gian Hilbert tách được với chuẩn $\| \cdot \|_{\mathcal{D}} := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}}$. Trong phần tiếp theo, ta cũng sẽ kí hiệu

$$H^{6,2}_{\mathrm{bc}}(0,l) := \big\{\mathbf{u} \in H^{6,2}((0,l);\mathbb{R}^3)\big|$$
$$\text{thỏa mãn điều kiện (109) và } \partial_{ssss}\mathbf{u}(l) = \partial_{sssss}\mathbf{u}(l) = \mathbf{0}\ \big\}.$$

Gọi $C([\tau,T],\mathcal{D}),\ 0 \le \tau \le T$, là không gian các hàm liên tục trên đoạn $[\tau,T]$ với giá trị trong $\mathcal{D}$ và α là một số dương. Định nghĩa

$$\|f\|_\alpha := \sup_{t\in[\tau,T]} \big(\|f(t)\|_{\mathcal{D}} e^{-\alpha t}\big), \qquad f \in C([\tau,T],\mathcal{D}).$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra được $\big(C([\tau,T],\mathcal{D}), \|\cdot\|_\alpha\big)$ là một không gian Banach.

Nhận xét 11. *Giả sử $\lambda(t) \in H^{3,2}((0,l);\mathbb{R})$ với mọi $t \in [0,T]$, $\sup_{t\in[0,T]} \|\lambda(t)\|_{H^{3,2}((0,l);\mathbb{R})} < \infty$, $\lambda(0,t) = \lambda(l,t) = \partial_s\lambda(l,t) = \partial_s\lambda(0,t) = 0,\ \lambda(s,t) > 0$ với mọi $s \in (0,l),\ t \in [0,T]$, và các hàm λ, $\partial_s\lambda$ đo được trên $[0,l]\times[0,T]$. Khi đó, theo [6], tồn tại hệ tiến hóa mạnh $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$ trên H liên kết với họ $(L(t), D(L(t)))_{0\le t\le T}$ thỏa mãn:*

(a) $\|U(t,\tau)\| \le e^{(C_1(t-\tau))}$ với mọi $0 \le \tau \le t \le T$;

(b) với mọi $w \in \mathcal{D}$ và $\tau \in [0,T]$, $\partial_t^+ U(t,\tau)w\Big|_{t=\tau} = L(\tau)w$ với hầu khắp $t \in [\tau,T]$;

(c) với mọi $w \in \mathcal{D}$ và $t \in (0,T]$, $\partial_\tau U(t,\tau)w = -U(t,\tau)L(\tau)w$ với hầu khắp $\tau \in [t,T]$.

Hơn nữa, cũng với giả thiết trên, ta thu được một số tính chất từ họ $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$ như sau.

Mệnh đề 12. *Với mỗi $w \in \mathcal{D}$ và $\tau \in [0,T]$ tồn tại duy nhất $u^\tau_w \in C([0,T],\mathcal{D})$ sao cho $u^\tau_w(t) = U(t,\tau)w$ với mọi $t \in [\tau,T]$. Ngoài ra, họ $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$ là hệ tiến hóa mạnh hầu khắp trên H tương ứng với họ $((L(t),\mathcal{D}))_{0\le t\le T}$ với không gian giá trị ban đầu $\mathcal{D}$ và thỏa mãn*

$$\partial_t U(t,\tau)w = L(t)U(t,\tau)w \quad \text{với mọi } w \in \mathcal{D},\ t \in [\tau,T]. \tag{112}$$

Chứng minh. Trước tiên, ta chứng minh $\partial_t U(t,\tau)w = L(t)U(t,\tau)w$ với mọi $w \in \mathcal{D}, t \in [\tau,T]$.

Gọi $(S(t))_{t\ge0}$ là C_0 nửa nhóm thu hẹp sinh bởi $(L_0,\mathcal{D})$. Theo [7, Theo. 1.2.4 and Theo. 4.1.3], $S(t-\tau)(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ and $S(t-\tau)w$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\frac{d}{dt}u(t) = L_0u(t),\ u(\tau) = w,\ w \in \mathcal{D},\ \text{và } u \in C([\tau,T],\mathcal{D}).$$

Ta chứng minh rằng phương trình

$$\frac{d}{dt}u(t) = L(t)u(t),\ u(\tau) = w,\ w \in \mathcal{D},\ \text{và } u \in C([\tau,T],\mathcal{D}) \tag{113}$$

có duy nhất nghiệm u^τ_w và $u^\tau_w(t) = U(t,\tau)w$ với mọi $t \in [\tau,T]$, trong đó, họ $(U(t,\tau))_{0\le\tau\le t\le T}$ là hệ tiến hóa như trong Nhận xét 11.

Dễ dàng kiểm tra được với mỗi $w \in \mathcal{D}$ và $\tau \in [0, T]$ ánh xạ

$$C([\tau, T], \mathcal{D}) \ni u \longmapsto J_w^\tau u \in C([\tau, T], \mathcal{D}),$$

là xác định, với $J_w^\tau u(t) := S(t-\tau)w + \int_\tau^t S(t-r)L_1(r)u(r)dr,\ t \in [\tau, T]$. Vì hạn chế của $(S(t))_{t\geq 0}$ lên không gian con $\mathcal{D}$ là một nửa nhóm thu hẹp nên với mọi $u_1, u_2 \in C([\tau, T], \mathcal{D})$ và $t \in [\tau, T]$ ta có

$$\begin{aligned}\|(J_w^\tau u_1 - J_w^\tau u_2)(t)\|_{\mathcal{D}} e^{-\alpha t} &\leq \int_\tau^t e^{-\alpha t} \|S(t-r)L_1(r)\big(u_1(r) - u_2(r)\big)\|_{\mathcal{D}} dr \\ \leq C_2 \int_\tau^t e^{-\alpha(t-r)} \|u_1(r) - u_2(r)\|_{\mathcal{D}} e^{-\alpha r} dr &= C_2 \|u_1 - u_2\|_\alpha \int_\tau^t e^{\alpha(r-t)} dr \leq \frac{C_2}{\alpha} \|u_1 - u_2\|_\alpha.\end{aligned}$$

Với $\alpha > C_2$, theo định lí điểm bất động Banach, tồn tại duy nhất $u_w^\tau \in C([\tau, T], \mathcal{D})$ sao cho

$$u_w^\tau(t) = S(t-\tau)w + \int_\tau^t S(t-r)L_1(r)u_w^\tau(r)dr.$$

Hơn nữa, theo định lí hội tụ trội Lebesgue và tính đóng của toán tử $(L_0, \mathcal{D})$, với mọi $t \in [\tau, T]$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_w^\tau(t) &= L_0 S(t-\tau)w + \int_\tau^t L_0 S(t-r)L_1(r)u_w^\tau(r)dr + L_1(t)u_w^\tau(t) \\ &= L_0\Big(S(t-\tau)w + \int_\tau^t S(t-r)L_1(r)u_w^\tau(r)dr\Big) + L_1(t)u_w^\tau(t) = L(t)u_w^\tau(t)\end{aligned}$$

và $u_w^\tau(\tau) = w$. Do đó, $u_w^\tau(t)$ là một nghiệm của phương trình (113) với $t \in [\tau, T]$. Tương tự như trong phép chứng minh của [7, Theo. 5.4.2] ta có

$$u_w^\tau(t) = U(t, \tau)w \quad \text{với mọi } t \in [\tau, T]. \tag{114}$$

Từ đó suy ra

$$\partial_t U(t, \tau)w = L(t)U(t, \tau)w \quad \text{với mọi } w \in \mathcal{D},\ t \in [\tau, T].$$

Theo tính đo được của $L(t)$, tính liên tục mạnh của $U(t, \tau)$, cùng với Nhận xét 11(ii), đẳng thức (112) và theo [4, Theo. 4.2.11] ta có

$$\int_\tau^t L(r)U(r, \tau)w dr = U(t, \tau)w - w \quad \text{với mọi } w \in \mathcal{D}, t \in [\tau, T]. \qquad \square$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. M. Ball. Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula. Proceedings of the American Math. Society, 63(2):370–373, (1977).

2. H. O. Fattorini. The Cauchy problem. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 18. Addison-

Wesley Publishing Co., Reading, Mass., (1983).

3. T. Kato. Linear evolution equations of "hyperbolic" type. II. J. Math. Soc. Japan, 25:648–666, (1973).
4. M. Miklavčič. Applied functional analysis and partial differential equations. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (1998).
5. A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, (1983).
6. M. T. Tan. Stochastic partial differential equations corresponding to time- inhomogeneous evolution equations. Dr. HUT-Verlag, Munich, (2012).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.71-82

TẬP BIẾN PHÂN CỦA NGHIỆM HỮU HIỆU HENIG CỦA ÁNH XẠ NHIỄU VÀ ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH SỰ ỔN ĐỊNH NGHIỆM CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉC TƠ CÓ RÀNG BUỘC

LÊ THANH TÙNG

Khoa Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ.

Đường 3/2, Quận Ninh Kiều, Thành phố Cần Thơ

Email: lttung@ctu.edu.vn

TÓM TẮT

Trong bài báo này, phân tích sự ổn định nghiệm sử dụng tập biến phân cho bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc được khảo sát. Liên hệ giữa tập biến phân cấp một, tập điểm hữu hiệu Henig của ánh xạ đa trị và trên-ánh-xạ của nó được nêu ra. Sau đó, liên hệ giữa tập biến phân của hàm mục tiêu và ánh xạ nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán tối ưu véc tơ được thiết lập. Cuối cùng, các kết quả được ứng dụng cho bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc.

Từ khóa: Tập biến phân loại một cấp một, Phân tích sự ổn định nghiệm, Ánh xạ nhiễu Henig

ABSTRACT

In this paper, sensitivity analysis in terms of variational sets for nonsmooth vector optimization is considered. The relations between first-order variational sets, and their proper Henig minima of a set-valued map and that of its profile map are given. Then, the relationships between the first-order variational sets of this objective map and that of the proper Henig perturbation map are established. Finally, applications to constrained vector optimization are obtained.

1 Giới thiệu

Phân tích sự ổn định nghiệm của bài toán tối ưu có tham số có nhiều ý nghĩa cả về lý thuyết và ứng dụng. Phân tích sự ổn định nghiệm có hai dạng là phân tích sự ổn định nghiệm dạng định tính và phân tích sự ổn định nghiệm dạng định lượng. Phân tích sự ổn định dạng định tính là khảo sát đưa ra các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục, tính Lipschitz địa phương...của hàm giá trị tối ưu. Phân tích sự ổn định dạng định lượng là khảo sát sự khả vi của hàm giá trị tối ưu. Khi hàm giá trị tối ưu không trơn, các tính chất khả vi sử dụng các loại đạo hàm suy rộng được khảo sát. Một trong những kết quả đầu tiên về khảo sát sự khả vi suy rộng là kết quả trong bài báo [7]. Trong đó, sử dụng đạo hàm đa trị tiếp liên , Tanino đã khảo sát tính chất của ánh xạ nhiễu và ánh xạ nhiễu yếu. Khi xét bài toán tối ưu véc tơ , nhiều khái niệm nghiệm hữu hiệu đã được đưa ra để loại trừ một số trường hợp bất thường của tập nghiệm. Trong đó, khái niệm niệm nghiệm hữu hiệu Henig là một trong các khái niệm nghiệm hữu

Ngày nhận bài: 15/6/2015 ; ngày nhận đăng: 11/3/2016

hiệu quan trong thường được sử dụng. Ngoài việc dùng trong khảo sát điều kiện tối ưu, khái niệm nghiệm hữu hiệu Henig cũng được dùng trong khảo sát sự ổn định nghiệm. Trong [6], tính chất của ánh xạ nhiễu Henig được khảo sát sử dụng đạo hàm tiếp liên cấp một. Các kết quả trong [6] đã được mở rộng sang cấp cao sử dụng đạo hàm tiếp liên cấp m trong [4]. Trong [12], sử dụng đạo hàm tiếp liên cấp hai các tính chất khả vi suy rộng cấp hai của ánh xạ nhiễu Henig được trình bày. Trong [10], sử dụng khái niệm đạo hàm theo-tia-tiệm-cận cấp hai như một điều kiện chuẩn hóa, các tính chất khả vi suy rộng cấp hai của ánh xạ nhiễu Henig với các giả thiết áp dụng hiệu quả hơn các kết quả trong [12].

Khái niệm tập biến phân được đưa ra trong [5] chứa đạo hàm tiếp liên và một số loại đạo hàm đa trị khác nên áp dụng thuận lợi hơn trong việc xây dựng các điều kiện cần tối ưu của bài toán tối ưu đa trị có ràng buộc. Hơn nữa, tập biến phân tồn tại trong nhiều trường hợp mà các loại đạo hàm đa trị khác là rỗng nên áp dụng hiệu quả hơn trong việc khảo sát sự ổn định nghiệm của bài toán tối ưu có tham số và các bài toán liên quan. Trong [2], một số phép toán của tập biến phân đã được áp dụng để khảo sát tập biến phân của ánh xạ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân có tham số. Tập biến phân cấp cao của ánh xạ nhiễu và ánh xạ nhiễu yếu của bài toán tối ưu hóa có tham số đã được thiết lập trong [1] qua đó mở rộng một số kết quả trong [8].

Dựa trên những kết quả phân tích trên, trong bài báo này, chúng tôi khảo sát phân tích sự ổn định nghiệm sử dụng tập biến phân loại một cấp một cho bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc. Cấu trúc bài báo như sau. Trong phần 2, một số định nghĩa và kiến thức chuẩn bị đã được nhắc lại. Liên hệ giữa tập biến phân cấp một, tập điểm hữu hiệu Henig của ánh xạ đa trị và trên-ánh-xạ của nó được nêu ra trong phần 3. Các kết quả ở phần 3 được ứng dụng cho bài toán tối ưu véc tơ và bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc trong phần 5.

2 Kiến thức chuẩn bị

Cho X, Y và Z là các không gian định chuẩn thực, $K \subseteq Y$ là nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. $\mathcal{U}(x_0)$ là tập các lân cận của điểm x_0. Với $M \subseteq X$, $\mathrm{int}M, \mathrm{cl}M, \partial M$ lần lượt là phần trong bao đóng, và biên của M. $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ và $\mathbb{N}$ lần lượt là tập số thực, tập số thực không âm và tập số tự nhiên. Một tập lồi $B \subseteq Y$ là môt cơ sở của K nếu $0 \notin \mathrm{cl}B$ and $K = \{tb, t \in \mathbb{R}_+, b \in B\}$. Dễ thấy K có một cơ sở compắc B khi và chỉ khi $C \cap \partial B$ compắc . Với ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, tập xác định, đồ thị và trên đồ thị của F được định nghĩa lần lượt là

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}F &:= \{x \in X | F(x) \neq \emptyset\}, \\ \mathrm{gr}F &:= \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}, \\ \mathrm{epi}F &:= \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x) + K\}. \end{aligned}$$

Ánh xạ trên-ánh-xạ của F là $F+K$ được định nghĩa bởi $(F+K)(x) = F(x)+K$. Dễ thấy $\mathrm{epi}F = \mathrm{gr}(F+K)$. Tập $A \subseteq Y$ được gọi là có tính trội nếu $A \subseteq \mathrm{Min}_K A + K$.Chúng ta nhắc lại một số khái niệm điểm hữu hiệu/nghiệm tối ưu trong tối ưu véc tơ như sau. Cho $a_0 \in A \subseteq Y$.

(i) a_0 được gọi là điểm cực tiểu/ điểm hữu hiệu địa phương của tập A (tương ứng với nón K), kí hiệu $a_0 \in \mathrm{Min}_K A$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(a_0)$ sao cho

$$(A \cap U - a_0) \cap (-K \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

(ii) a_0 được gọi là điểm cực tiểu/ điểm hữu hiệu yếu địa phương của tập A , kí hiệu $a_0 \in \mathrm{WMin}_K A$, nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(a_0)$ sao cho

$$(A \cap U - a_0) \cap -\mathrm{int}K = \emptyset.$$

(ii) a_0 được gọi là điểm cực tiểu/ điểm hữu hiệu Henig địa phương của tập A , kí hiệu $a_0 \in \mathrm{He}_K A$, nếu tồn tại nón lồi $C \subsetneq Y$ với $K \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{int}C$ và $U \in \mathcal{U}(a_0)$ sao cho

$$(A \cap U - a_0) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Nếu $U = Y$, từ "địa phương" được bỏ đi, nghĩa là ta có các khái niệm tương ứng "toàn cục". Dễ thấy

$$\mathrm{He}_K A \subseteq \mathrm{Min}_K A \subseteq \mathrm{WMin}_K A.$$

Một số khái niệm đạo hàm suy rộng được nhắc lại như sau.

Định nghĩa 2.1. Cho ánh xạ đa trị $F : X \rightrightarrows Y$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F, u \in X$.

(i) (Xem [3]) Đạo hàm tiếp liên của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi

$$D(F, x_0, y_0)(u) = \{v \in Y | \exists t_n \downarrow 0, \exists (u_n, v_n) \to (u, v),\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n u_n), \forall n\}.$$

(ii) (Xem [7]) Đạo hàm TP của F at $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$ được định nghĩa bởi

$D_S F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y|\ \exists t_n > 0,\ \exists (u_n, v_n) \to (u, v),\ \forall n, y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n u_n),\ t_n u_n \to 0\}$.

(iii) (Xem [5]) Tập biến phân loại một cấp một của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi

$$V^1(F, x_0, y_0) = \{v \in Y | \exists t_n \downarrow 0, \exists x_n \xrightarrow{F} x_0, \exists v_n \to v,\ y_0 + t_n v_n \in F(x_n), \forall n\},$$

với $x_n \xrightarrow{F} x_0$ nghĩa là $x_n \to x_0$ và $F(x_n) \neq \emptyset$.

(iv) Tập biến phân suy biến loại một cấp một của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi

$$V^{\infty(1)}(F, x_0, y_0) = \{v \in Y | \exists t_n \downarrow 0, \exists x_n \xrightarrow{F} x_0, \exists \lambda_n > 0,$$

$$\exists y_n \in \frac{F(x_n) - y_0}{t_n}, \lambda_n y_n \to y\}).$$

Định nghĩa 2.2. (Xem [3]) Ánh xạ $F : X \rightrightarrows Y$ được gọi là tĩnh quanh x_0 nếu tồn tại $U \in \mathcal{U}(x_0)$ và $M > 0$ sao cho

$$F(x) \subseteq F(x_0) + M\|x - x_0\|B_Y \; \forall x \in U,$$

với B_Y là hình cầu đơn vị trong Y.

3 Tập biến phân của ánh xạ đa trị

Trong phần này, liên hệ giữa tập biến phân cấp một, tập điểm hữu hiệu Henig của ánh xạ đa trị và ánh xạ trên-ánh-xạ của nó được trình bày. Trước hết, chúng tôi đưa ra khái niệm compắc suy rộng như sau.

Định nghĩa 3.1. Cho $F : X \to 2^Y,\ (x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. F được gọi là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0) nếu với mọi dãy $t_n \downarrow 0$, $x_n \xrightarrow{F} x_0$ và với mọi dãy $y_n \to y$ với

$$y_0 + t_n y_n \in F(x_n),$$

thì dãy y_n có một dãy con hội tụ.

Mệnh đề 3.1. *Nếu F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0), thì*

$$V^1(F, x_0, y_0) + K = V^1(F + K, x_0, y_0).$$

Chứng minh. Trước hết, hệ thức

$$V^1(F, x_0, y_0) + K \subseteq V^1(F + K, x_0, y_0), \tag{115}$$

là trường hợp đặc biệt của Mệnh đề 3.1 trong [1]. Để thuận tiện, chứng minh được trình bày lại như sau. Lấy $y \in V^1(F, x_0, y_0) + K$. Khi đó, tồn tại $v \in V^1(F, x_0, y_0)$ và $k \in K$ sao cho $y = v + k$. Do $v \in V^1(F, x_0, y_0)$, tồn tại $t_n \downarrow 0$, $x_n \xrightarrow{F} x_0$ và $v_n \to v$ sao cho

$$y_0 + t_n v_n \in F(x_n), \forall n.$$

Do đó,

$$y_0 + t_n(v_n + k) \in (F + K)(x_n), \forall n.$$

Đặt $y_n = v_n + k$ thì $y_n \to y$, nên $y \in V^1(F + K, x_0, y_0)$.

Bây giờ ta chứng minh chiều ngược lại của hệ thức (115). Lấy $y \in V^1(F + K, x_0, y_0)$. Khi đó, tồn tại $t_n \downarrow 0$, $x_n \xrightarrow{F} x_0$, $v_n \to v$ và $k_n \in K$ sao cho

$$y_0 + t_n(v_n - k_n) \in F(x_n), \forall n.$$

Vì F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0), nên $v_n - k_n \to v'$ (lấy dãy con nếu cần). Do đó,

$$v' \in V^1(F, x_0, y_0), \tag{116}$$

và $k_n = v_n - (v_n - k_n) \to v - v'$, cùng với tính đóng của K, được

$$v - v' \in K. \tag{117}$$

Từ (116), (117), ta có $v \in V^1(F, x_0, y_0) + K$. □

Ví dụ sau cho thấy giả thiết compắc biến phân của F là cần thiết.

Ví dụ 3.1. Cho $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$, $(x_0, y_0) = (0, (0, 0))$ và ánh xạ F xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \{(0,0)\}, & \text{if } x = 0, \\ \{(-1,-2)\}, & \text{if } x \neq 0. \end{cases}$$

Chúng ta có thể kiểm tra rằng F không compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0). Tính toán trực tiếp ta có

$$V^1(F, x_0, y_0) = \{(0, 0)\},$$

$$V^1(F + K, x_0, y_0) = \mathbb{R}^2,$$

Do đó,

$$V^1(F, x_0, y_0) + K \neq V^1(F + K, x_0, y_0).$$

Mệnh đề 3.2. *Nếu F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0), thì*

$$\mathrm{He}_K V^1(F, x_0, y_0) = \mathrm{He}_K V^1(F + K, x_0, y_0).$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1, ta có

$$V^1(F, x_0, y_0) + K = V^1(F + K, x_0, y_0). \tag{118}$$

Đầu tiên, chúng ta chứng minh bao hàm thức

$$\mathrm{He}_K V^1(F, x_0, y_0) \subseteq \mathrm{He}_K V^1(F + K, x_0, y_0). \tag{119}$$

Lấy $v \in \mathrm{He}_K V^m(F, x_0, y_0)$. Khi đó, tồn tại nón lồi C với $K \backslash \{0\} \subseteq \mathrm{int} C$ sao cho $v \in \mathrm{Min}_C V^1(F, x_0, y_0)$. Ta chứng minh v thuộc vế phải (119) tương ứng với cùng nón C. Giả thiết phản chứng tồn tại $w \in V^1(F, x_0, y_0)$ with $v - w := \bar{c} \in C \setminus (-C)$. Theo (118), tồn tại $w' \in V^1(F, x_0, y_0)$ sao cho $w - w' := k' \in K$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn:

$$v - w' = \bar{c} + k' \in C \setminus (-C) + K \subseteq C \setminus (-C).$$

Để chứng minh bao hàm thức ngược lại của (119), lấy $v \in \mathrm{He}_K V^1(F+K, x_0, y_0)$ tương ứng với C, nghĩa là $v \in \mathrm{Min}_C V^1(F+C, x_0, y_0)$. Theo (118), tồn tại $v' \in V^1(F, x_0, y_0) \subseteq V^1(F+K, x_0, y_0)$ sao cho $v - v' := k' \in K$. Nếu $k' \in K \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{int}C$, thì $v \notin \mathrm{Min}_C V^1(F+C, x_0, y_0)$, dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, $c' = 0$ và $v \in V^1(F, x_0, y_0)$. Do đó,

$$v \in \mathrm{He}_K V^1(F+K, x_0, y_0) \cap V^1(F, x_0, y_0).$$

Vậy, với cùng nón C, ta có $v \in \mathrm{He}_K V^1(F, x_0, y_0)$. □

Nhận xét 3.1. Giả thiết "F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (x_0, y_0)" trong Mệnh đề 3.1 và Mệnh đề 3.2 có thể thay bằng một trong các giả thiết sau:

(i) K có một cơ sở compắc và $V^1(F+K, x_0, y_0)$ có tính trội,

(ii) K có một cơ sở compắc và $V^{\infty(1)}(F, x_0, y_0) \cap (-K) = \{0\}$.

4 Ứng dụng cho bài toán tối ưu véc tơ có tham số

Trong phần này, các kết quả trong phần 3 được áp dụng cho bài toán tối ưu đa trị có tham số.

4.1 Bài toán tối ưu véc tơ

Cho U, Y là các không gian định chuẩn. U là không gian các tham số nhiễu, Y là không gian mục tiêu được sắp thứ tự bởi nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng K và $F : U \rightrightarrows Y$. Định nghĩa ánh xạ nhiễu Henig $\mathcal{H} : U \rightrightarrows Y$ với

$$\mathcal{H}(u) := \mathrm{He}_K F(u).$$

Chúng ta sẽ khảo sát liên hệ giữa tập biến phân của F và tập biến phân của $\mathcal{H}$ và quan hệ giữa tập điểm cực tiểu Henig của các tập này.

Định nghĩa 4.1. F được gọi là K-trội bởi $\mathcal{H}$ gần u_0 nếu $F(u) \subseteq \mathcal{H}(u) + K$, với mọi u trong một lân cận $U \in \mathcal{U}(u_0)$.

Nhận xét 4.1. Giả sử $y_0 \in \mathcal{H}(u_0)$ và F được gọi là K-trội bởi $\mathcal{H}$ gần u_0 thì

$$V^1(F+K, u_0, y_0) = V^1(\mathcal{H}+K, u_0, y_0).$$

Mệnh đề 4.1. *Nếu F là K-trội bởi $\mathcal{H}$ gần u_0 và F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (u_0, y_0) thì*

$$\mathrm{He}_K V^1(F, x_0, y_0) \subseteq V^1(\mathcal{H}, x_0, y_0).$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{H}(u) \subseteq F(u), \forall u \in U$, nên $\mathcal{H}$ là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (u_0, y_0). Do đó ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{He}_K V^1(F, u_0, y_0) &= \mathrm{He}_K V^1(F + K, u_0, y_0) \\ &= \mathrm{He}_K V^1(\mathcal{H} + K, u_0, y_0) \\ &= \mathrm{He}_K V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0) \\ &\subseteq V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0) \end{aligned}$$

Ở đây, đẳng thức thứ nhất và thứ ba do Mệnh đề 3.2, và đẳng thức thứ hai từ Nhận xét 4.1. □

Ví dụ sau minh họa cho kết quả trong Mệnh đề 4.1.

Ví dụ 4.1. Cho $U = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+, (u_0, y_0) = (0, (0, 0))$ và F được định nghĩa bởi

$$F(u) = \{u\} \times [2|u|, +\infty).$$

Khi đó, $\mathcal{H}(u) = \{(u, 2|u|)\}$. Ta có

$$V^1(F, u_0, y_0) = \{(y_1, y_2) \in Y | y_2 \geq 2|y_1|\},$$

$$V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0) = \{(y_1, y_2) \in Y | y_2 = 2|y_1|\}.$$

Có thể kiểm tra được tất cả các giả thiết trong Mệnh đề 4.1 đều thỏa. Tính toán trực tiếp ta có

$$\mathrm{He}_K V^1(F, u_0, y_0) = \mathrm{He}_K V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0) = \{(y_1, y_2) \in Y | y_1 \leq 0, y_2 = 2|y_1|\}.$$

4.2 Bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc

Trong mục này, giả sử U, W, Y là các không gian Euclide với chuẩn thường, $K \subseteq Y$ là nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng, hàm véc tơ khả vi liên tục $f : W \times U \to Y$ và ánh xạ đa trị $X : U \rightrightarrows W$ và $G : U \rightrightarrows Y$ xác định bởi

$$F(u) = f(X(u), u) = \{y \in Y | y = f(x, u), x \in X(u)\}, u \in U.$$

Chúng ta xét bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc tham số hóa (xem [8]) như sau

$$(P_u) \qquad \mathrm{He}_K\{y \in Y | y = f(x, u), x \in X(u)\} = \mathrm{He}_K F(u),$$

với x là biến quyết định, u là tham số nhiễu, f là hàm mục tiêu, X là ánh xạ ràng buộc và F là ánh xạ tập nghiệm chấp nhận được. Định nghĩa $\tilde{X} : U \times Y \rightrightarrows X$

$$\tilde{X}(u, y) = \{x \in W | x \in X(u), y = f(x, u)\}.$$

Mệnh đề 4.2. *Cho $u_0 \in U, x_0 \in X(u_0)$, $y_0 = f(x_0, u_0)$ và f là hàm khả vi (Fréchet) liên tục tại (x_0, u_0). Khi đó, với mọi $u \in U$,*

$$\bigcup_{x \in DX(u_0,x_0)(u)} \nabla f(x_0, u_0)(x, u) \subseteq V^1(F, u_0, x_0). \tag{120}$$

Hơn nữa, nếu các giả thiết sau thỏa mãn

(i) $\tilde{X}$ *là tĩnh gần* (u_0, y_0) *và* $\tilde{X}(u_0, y_0) = \{x_0\}$

(ii) $D_S X(u_0, x_0)(0) = \{0\}$

(iii) $D_S X^{-1}(x_0, u_0)(0) = \{0\}$

thì bao hàm thức ngược lại của (120) cũng thỏa mãn.

Chứng minh. Lấy v thuộc vế trái của (120). Khi đó, tồn tại $x \in DX(u_0, x_0)(u)$ sao cho $v = \nabla f(x_0, u_0)(x, u)$. Vì $x \in DX(u_0, x_0)(u)$ nên tồn tại dãy $t_n \downarrow 0$ và dãy $(u_n, x_n) \to (u, x)$ sao cho

$$x_0 + t_n x_n \in X(u_0 + t_n u_n).$$

Khi đó,

$$f(x_0 + t_n x_n, u_0 + t_n u_n) \in F(u_0 + t_n u_n).$$

Từ giả thiết f là hàm khả vi liên tục tại (x_0, u_0), ta có

$$f(x_0, u_0) + t_n \nabla f(x_0, u_0)(x_n, u_n) + o(t_n \|(x_n, u_n)\|) \in F(u_0 + t_n u_n).$$

Suy ra

$$y_0 + t_n \left(\nabla f(x_0, u_0)(x_n, u_n) + \frac{o(t_n \|(x_n, u_n)\|)}{t_n} \right) \in F(u_0 + t_n u_n).$$

Do

$$\nabla f(x_0, u_0)(x_n, u_n) + \frac{o(t_n \|(x_n, u_n)\|)}{t_n} \to \nabla f(x_0, u_0)(x, u),$$

nên

$$\nabla f(x_0, u_0)(x, u) \in DF(u_0, y_0)(u) \subset V^1 F(u_0, y_0).$$

Bây giờ, ta chứng minh chiều ngược lại của (120). Lấy $v \in V^1 F(u_0, y_0)$. Khi đó, tồn tại dãy $t_n \downarrow 0$ và $u_n \xrightarrow{F} u_0$ và $v_n \to v$ sao cho

$$y_0 + t_n v_n \in F(u_n) = f(X(u_n), u_n).$$

Do đó, tồn tại $\tilde{x}_n \in X(u_n)$ sao cho với mọi n,

$$y_0 + t_n v_n = f(\tilde{x}_n, u_n).$$

Từ giả thiết (i), do $x_n \in \tilde{X}(u_n, y_0 + t_n v_n)$, nên tồn tại $L > 0$ sao cho

$$\|x_n - x_0\| \leq L\|(u_n, y_0 + t_n v_n) - (u_0, y_0)\|.$$

Cho $n \to \infty$, từ hệ thức trên ta có $x_n \to x_0$. Đặt

$$\bar{u}_n = \frac{u_n - u_0}{t_n},\ \bar{x}_n = \frac{x_n - x_0}{t_n},$$

ta có

$$u_n = u_0 + t_n \bar{u}_n,\ x_n = x_0 + t_n \bar{x}_n \in X(u_n)$$

và

$$y_0 + t_n v_n = f(x_0 + t_n \bar{x}_n, u_0 + t_n \bar{u}_n). \tag{121}$$

Khi đó, $\{u_n\}$ sẽ có một dãy con hội tụ. Thật vậy, giả thiết phản chứng $\|u_n\| \to \infty$. Đặt

$$\hat{u}_n = \frac{\overline{u}_n}{\|\overline{u}_n\|}, \hat{x}_n = \frac{x_n}{\|\overline{u}_n\|}, r_n = t_n\|\overline{u}_n\|,$$

ta có $\|\overline{u}_n\| \to \hat{u}$ có chuẩn bằng một, $\hat{x}_n \to 0, r_n > 0$ và

$$u_0 + t_n u_n \in X^{-1}(x_0 + r_n \bar{x}_n).$$

Suy ra $\hat{u} \in D_S X^{-1}(x_0, u_0)(0)$, mâu thuẫn với (iii). Do đó, $\{u_n\}$ sẽ có một dãy con hội tụ, giả sử cũng là $\{\bar{u}_n\}$, đến $\bar{u} \in U$. Từ giả thiết (ii) và $x_0 + t_n \bar{x}_n \in X(u_0 + t_n \bar{u}_n)$, chứng minh tương tự ta có $\bar{x}_n$ hội tụ đến $\bar{x} \in D(u_0, x_0)(\bar{u})$.

Mặt khác, từ (121) và tính khả vi của f, ta có

$$y_n = \frac{1}{t_n}\left(f(x_0 + t_n x_n, u_0 + t_n u_n) - y_0\right) \to \nabla f(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u}).$$

Do, $y_n \to y$, ta có $y = \nabla f(x_0, u_0)(\bar{x}, \bar{u})$, nên y thuộc vế trái của (120). □

Ví dụ sau cho thấy, bao hàm thức (120) thực sự là ngặt nếu tính tĩnh của $\tilde{X}$ gần (u_0, y_0) không xảy ra.

Ví dụ 4.1. Cho $U = W = Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $X : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$f(x, u) = x^2,\ X(u) = \{u\}$$

và $(x_0, u_0) = (0, 0)$. Khi đó, $y_0 = 0$,

$$F(u) = \{u^2\}$$

$$\widetilde{X}(u, y) = \begin{cases} \{\sqrt{y}\}, & \text{nếu } y = u^2, \\ \emptyset, & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

Dễ thấy các điều kiện (ii), (iii) trong Mệnh đề 4.2 đều thỏa nhưng $\tilde{X}$ không tĩnh gần (u_0, y_0). Ta có $\nabla f(x,u) = (2x,0), \nabla f(x_0,u_0) = (0,0), \nabla f(x_0,u_0)(x,u) = 0$,

$$DX(u_0,x_0)(u) = \{u\},$$

$$V_1(F,u_0,y_0) = \mathbb{R}_+.$$

Do đó, với mọi u,

$$\bigcup_{x \in DX(u_0,x_0)(u)} \nabla f(x_0,u_0)(x,u) = \{0\} \subsetneqq V^1(F,u_0,y_0).$$

Kết hợp kết quả trong Mệnh đề 4.1 và Mệnh đề 4.2, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 4.3. *Cho $u_0 \in U, x_0 \in X(u_0)$, $y_0 = f(x_0,u_0)$ và f là hàm khả vi liên tục. Nếu các giả thiết sau thỏa*
(i) $\tilde{X}$ là tĩnh gần (u_0,y_0), và $\tilde{X}(u_0,y_0) = \{x_0\}$
(ii) $D_S X(u_0,x_0)(0) = \{0\}$
(iii) $D_S X^{-1}(x_0,u_0)(0) = \{0\}$
(iv) F là K-trội bởi $\mathcal{H}$ gần u_0 và F là compắc biến phân loại một bậc nhất tại (u_0,y_0),
thì, với mọi $u \in U$,

$$\mathrm{He}_K\left(\bigcup_{x \in DF(u_0,x_0)(u)} \nabla f(x_0,u_0)(x,u)\right) \subseteq V^1(\mathcal{H},u_0,x_0).$$

Kết quả trong Mệnh đề 4.3 được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 4.2. Cho $U = W = Y = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $X : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$f(x,u) = x,\ X(u) = \begin{cases} \{x \in W | x = u\}, & \text{nếu } u \geq 0, \\ \emptyset, & \text{trường hợp khác,} \end{cases}$$

và $(x_0,u_0) = (0,0)$. Khi đó, $y_0 = 0$,

$$F(u) = \begin{cases} \{y \in Y | y = u\}, & \text{nếu } u \geq 0, \\ \emptyset, & \text{trường hợp khác,} \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = F(u),$$

$$\widetilde{X}(u,y) = \begin{cases} \{y\}, & \text{nếu } y = u, u \geq 0, \\ \emptyset, & \text{trường hợp khác.} \end{cases}$$

Dễ thấy $\nabla f(x_0,u_0) = (1,0)$ và các điều kiện trong Mệnh đề 4.3 đều thỏa. Ta có

$$DX(u_0,x_0)(u) = \begin{cases} \{u\} & \text{nếu } u \geq 0, \\ \emptyset, & \text{trường hợp khác,} \end{cases} \quad \nabla f(x_0,u_0)(x,u) = x,$$

$$V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0) = \mathbb{R}_+.$$

Do đó, với mọi $u \geq 0$,

$$\mathrm{He}_K\left(\bigcup_{x\in DF(u_0,x_0)(u)} \nabla f(x_0, u_0)(x, u)\right) = \mathrm{He}_K\{u\} = \{u\} \subset V^1(\mathcal{H}, u_0, y_0).$$

5 Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã phân tích sự ổn định nghiệm sử dụng tập biến phân loại một cấp một cho bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc. Liên hệ giữa tập biến phân cấp một, tập điểm hữu hiệu Henig của ánh xạ đa trị và ánh xạ trên-ánh-xạ của nó và liên hệ giữa tập biến phân của hàm mục tiêu và ánh xạ nghiệm hữu hiệu Henig được thiết lập. Cuối cùng, các kết quả được ứng dụng cho bài toán tối ưu véc tơ có ràng buộc có tham số. Một cách tự nhiên các kết quả trong bài báo này có thể mở rộng sang cho tập biến phân loại một cấp cao và tập biến phân loại hai cấp cao được định nghĩa trong [4] bằng cách sử dụng khái niệm đạo hàm theo-tia-tiệm-cận cấp cao được định nghĩa trong [9], [10]. Hơn nữa, có thể tìm thêm điều kiện để có bao hàm thức ngược lại trong kết luận của Mệnh đề 4.1 và 4.3. Các kết quả mở rộng này đã được chúng tôi thực hiện trong bài báo [11].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anh, N.L.H., Khanh, P.Q.: Variational sets of pertubation maps and applications to sensitivity analysis for constrained vector optimization, J. Optim. Theory Appl. **158**, 363-384 (2013)
2. Anh, N.L.H., Khanh, P.Q., Tung, L.T.: Variational sets: Calculus and applications to nonsmooth vector optimization. Nonlinear Analysis TMA. **74** 2358-2379 (2011)
3. Aubin, J.P., Frankowska, H.: Set-Valued Analysis. Birkhäuser, Boston (1990)
4. Diem, H.T.H., Khanh, P.Q., Tung, L.T.: On higher-order sensitivity snalysis in nonsmooth vector optimization, J. Optim.Theory Appl. **162** 463-488 (2014)
5. Khanh, P.Q., Tuan, N.D.: Variational sets of multivalued mappings and a unified study of optimality conditions. J. Optim. Theory Appl. **139** 45-67 (2008)
6. Kuk, H., Tanino,T., Tanaka,M.: Sensitivity analysis in vector optimization. J. Optim. Theory Appl. **89**, 713-730 (1996)
7. Shi, D.S: Contingent derivative of the perturbation map in multiobjective optimization. J. Optim. Theory Appl. **70**, 385-396 (1991)
8. Tanino, T.: Sensitivity analysis in multiobjective optimization. J. Optim. Theory Appl. **56**, 479-499 (1988)
9. Tung, L.T.: Higher-order contingent derivatives of perturbation maps in parametric set-valued vector optimizarion. J. Nonlinear Funct. Anal. **2015**, Article ID 19 (2015)
10. Tung, L.T.: Second-order radial-asymptotic derivatives and applications in set-valued vector optimization. Pacific J. Optim. đã nhận đăng.

11. Tung, L.T.: Variational sets of Henig pertubations maps and applications to sensitivity analysis for constrained vector optimization, đã gửi đăng.

12. Wang, Q.L., Li, S.J.: Sensitivity and stability for the second-order contingent derivative of the proper perturbation map in vector optimization, Optim. Lett. **6**, 731-748 (2012)

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.83-92

A MODIFIED CHI-SQUARED TYPE TESTS FOR GENERALIZED BIRNBAUM-SAUNDERS DISTRIBUTIONS

TRẦN XUÂN QUANG[1*], NGUYỄN VĂN TRỊNH[2] AND ĐÀO NGỌC DŨNG[3]

[1,3]Khoa Đại Cương, Trường Đại học Thái Bình, Xã Tân Bình, TP. Thái Bình, Thái Bình, Vietnam.

[2]Khoa Cơ sở- Cơ bản, Đại học Hàng Hải Việt Nam, 484 Lạch Tray, Hải Phòng, Vietnam

*Email: quangtx.math@gmail.com

ABSTRACT

A modified Chi-squared type tests based on Nikulin-Rao-Robson statistic Y_n^2 is developed for the Generalized Birnbaum-Saunders distributions with unknown parameters by using the maximum likelihood estimators (MLE). We study the power of the test against some alternatives for equiprobable grouping random intervals.

Keywords: Birnbaum-Saunders distribution, Fatigue life distributions, Generalized Birnbaum-Saunders distributions, Maximum likelihood estimators, Modified Chi-squared tests, Pearson's Chi-squared tests, Powerful

TÓM TẮT

Kiểm định phù hợp Y_n^2 dựa trên thống kê của Nikulin-Rao-Robson được phát triển cho họ phân phối tham số Birnbaum-Saunders tổng quát, phương pháp hợp lý cực đại được sử dụng để ước lượng các tham số. Chúng tôi cũng nghiên cứu độ mạnh của kiểm định phù hợp Y_n^2 trong một vài trường hợp có đối thiết khi các phân hoạch nhóm ngẫu nhiên được sử dụng.

1 Introduction

The Birnbaum-Saunders (BS) distribution is a useful model for describing fatigue and reliability data. This model allows us to relate the total time until the failure to some type of cumulative damage. This distribution was proposed by Birnbaum and Saunders [3] with two parameters, named as shape and scale parameters.

A random variable T is the BS distribution with shape and scale parameters α and β, respectively if the probability density function of T can be written as

$$f_{BS}(t,\,\alpha,\beta)=\frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\left\{\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)^2\right\}, \tag{122}$$

and we obtain that the cumulative distribution function is

$$F_{BS}(t)=\Phi\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right\},\ \alpha>0,\beta>0,t>0,$$

Ngày nhận bài: 27/6/2015 ; ngày nhận đăng: 23/6/2016

where $\Phi(t)$ is the standard normal the cumulative distribution function. This means that we are admitting as definition that a random variable T follows the BS distribution with shape and scale parameters $\alpha > 0$ and $\beta > 0$, respectively, if it can be written as

$$T = \frac{\beta}{4}\left[\alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4}\,\right]^2, \tag{123}$$

where $Z \simeq N(0,\, 1)$. Then the random variable Z may be stochastically represented in terms of T as

$$Z = \frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}}\right] \simeq N(0,\, 1). \tag{124}$$

In 2002, Díaz-García *et all.* [6], Sanhueza et al. [20] developed the generalised Birnbaum-Saunders (GBS) distributions which are related to standard symmetrical distributions in $\mathbf{R}$, also known as elliptically contoured or simple elliptic distribution, for example, Normal, Cauchy, Laplace, Logistic, Power Exponential and $t(\nu)$-Student distributions. In this case, the standard symmetrical distribution functions are used to instead of the normal distribution of the random variable Z in (124). The probability density function $f_Z(z,\, 0,\, 1)$ and cumulative distribution function $F_Z(z,\, 0,\, 1)$ of Z in $\mathbf{R}$, can be written as

$$f_Z(z,\, 0,\, 1) = c\, g(z^2), \qquad F_Z(z,\, 0,\, 1) = \int\limits_{-\infty}^{z} f_Z(u,\, 0,\, 1)du, \tag{125}$$

where, $g(.)$ is the kernel of the probability density function of Z and c being the normalization constant, such that $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(z^2)dz = c^{-1}$.

Whereby we can give the following probability density function of GBS distributions

$$f(t, \alpha, \beta) = c.\frac{1}{2\alpha\beta}\Big\{\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big\}g\left\{\frac{1}{\alpha^2}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]^2\right\},\ \alpha > 0, \beta > 0, t > 0. \tag{126}$$

Thus, if a random variable T has the GBS distributions, the cumulative distribution function of T is expressed as

$$F(t, \alpha, \beta) = F_Z\left(\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right]\right),\ t > 0. \tag{127}$$

A complete review about the theoretical properties, methodology and applications of GBS distributions, one can find in the importance keys of Díaz-García *et all.* [6], Sanhueza et al. [20], Nikulin & Tran [16]. We only consider here the Logistic Birnbaum-Saunders ($LogBS$) distribution, which the kernel Logistic standard is used to instead of the kernel normal g in (125) and (126). Figure 1 illustrate the probability density function of $LogBS$ distribution with

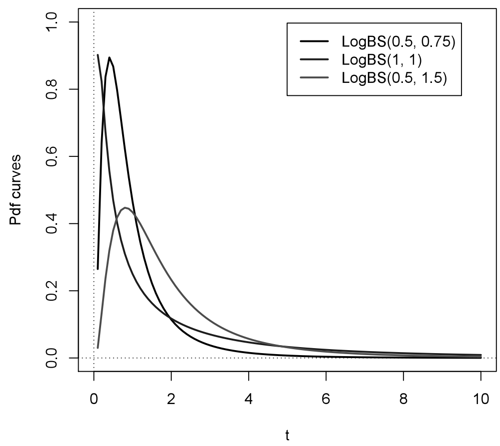


Figure 1: Probability density curves of Logistic Birnbaum-Saunders distribution with different parameters.

different parameters.

The random variable T belongs to the $LogBS$ distribution, denoted by $T \simeq LogBS(\alpha, \beta)$, if its probability density function is given as ($\theta = (\alpha,\, \beta)^T$)

$$f(t,\,\theta) = \frac{1}{2\alpha\beta}\Big\{\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big\} \frac{\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right\}}{\left\{1 + \exp\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right\}\right\}^2}, \quad t > 0. \tag{128}$$

Therefore, the cumulative functions of T is

$$F(t,\,\theta) = \frac{\exp\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right\}}{1 + \exp\left\{\frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}}\right)\right\}}, \quad t\ >\ 0. \tag{129}$$

Let us consider the sample $\mathbf{X} = (X_1,\, X_2,\, \cdots,\, X_n)^T$ from the random variable $X \simeq LogBS(\alpha, \beta)$. The log-likelihood function based on $\mathbf{X}$ sample is given by

$$\ell(\theta) = -n\ln\alpha - n\ln\beta + \sum_{i=1}^{n}\big\{\ln K_i + a_i - 2\ln\left(1 + e^{a_i}\right)\big\} - n\ln 2, \tag{130}$$

where

$$a_i = \frac{1}{\alpha}\Big\{\sqrt{\frac{X_i}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{X_i}}\Big\},\ b_i = \frac{1}{\alpha}\Big\{\sqrt{\frac{X_i}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{X_i}}\Big\},\ K_i = \Big(\frac{\beta}{X_i}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{\beta}{X_i}\Big)^{\frac{3}{2}},\ i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n.$$

The MLE $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha},\, \hat{\beta})^T$ of $\theta = (\alpha,\, \beta)^T$ can be obtained by solving the non-linear system of scores functions

$$\dot{\ell}(\theta) = (\dot{\ell}_\alpha(\theta),\, \dot{\ell}_\beta(\theta))^T = \mathbf{0}_2,$$

which given by

$$\dot{\ell}_\alpha(\theta) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\ell(\theta) = -\frac{1}{\alpha}\Big\{n + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(1-e^{a_i})}{1+e^{a_i}}\Big\},$$

$$\dot{\ell}_\beta(\theta) = \frac{\partial}{\partial \beta}\ell(\theta) = -\frac{1}{\beta}\Big\{n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1+3\frac{\beta}{X_i}}{1+\frac{\beta}{X_i}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i(1-e^{a_i})}{1+e^{a_i}}\Big\}.$$

2 Some modified chi-squared type tests

Let us consider the problem of testing the hypothesis H_0 that the distribution of the sample $\mathbf{X}$ belongs to the family of Logistic Birnbaum-Saunders distribution, which is

$$H_0: \quad F(t,\, \theta), \quad \theta = (\alpha,\, \beta)^T,\, t > 0. \tag{131}$$

We divide the interval $(0,\, \infty)$ into r smaller intervals $I_j = (a_{j-1},\, a_j]$ such that

$$0 \simeq a_0 < a_1 < \cdots < a_{r-1} < a_r = \infty, \tag{132}$$

and grouping the sample over these intervals, we obtain the vector of frequencies $\nu = (\nu_1,\, \nu_2,\, \cdots \nu_r)^T$ and the probability vector $p(\theta) = (p_1(\theta),\, p_2(\theta),\, \cdots,\, p_r(\theta))^T$, where

$$p_j(\theta) = \mathbf{P}(X_i \in I_j | H_0) = F(a_j,\, \theta) - F(a_{j-1},\, \theta),\, j = 1,\, 2,\, \cdots,\, r.$$

To test the hypothesis H_0, Pearson [18] proposed a test based on the so-called quadratic from of Pearson

$$\mathbf{X}_n^2(\theta) = \mathbf{X}_n^T(\theta)\mathbf{X}_n(\theta) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i(\theta))^2}{np_i(\theta)}, \tag{133}$$

where

$$\mathbf{X}_n(\theta) = \left(\frac{\nu_1 - np_1(\theta)}{\sqrt{np_1(\theta)}},\, \frac{\nu_2 - np_2(\theta)}{\sqrt{np_2(\theta)}},\, \cdots,\, \frac{\nu_r - np_r(\theta)}{\sqrt{np_r(\theta)}}\right)^T.$$

Under H_0 if θ is known, it was shown by K. Pearson in 1900 (see also, Drost [8]) that

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{X}_n^2(\theta) \geq x\} = \mathbf{P}\{\chi^2_{r-1} \geq x\}, \tag{134}$$

where χ^2_{r-1} has the chi-squared distribution with $r-1$ degrees of freedom.

The hypothesis H_0 must be rejected at a significance level α, whenever $\mathbf{X}_n^2(\theta) > C_\alpha$, where C_α is the critical value of the Pearson's test, $C_\alpha = \chi^2_\alpha(r-1)$ is the upper α-quantile of the χ^2

distribution with $r-1$ degrees of freedom.

But generally θ is unknown and must be estimated using the sample $\mathbf{X}$, if we replace θ in (133) by any $\sqrt{n}$-consistent estimate θ_n^*, the limit distribution of (133) will no be χ^2_{r-1}, depending on the method of estimation of θ and the properties of the estimator θ_n^*.

1. NRR test statistic. In 1973, Nikulin (see [13], [14]) proposed to modify the standard Chi-squared Pearson's test for continuous distributioin with shift and scale parameters, also Rao and Robson [19] had obtained the same result for exponential family, and since 1998, the test is well known as the Nikulin-Rao-Robson (NRR) test. More detail of NRR test statistic, one can see, Van de Vaart [22], Nikulin et al. [17], Greenwood and Nikulin [9], Bagdonavičius et al. [1], and we can write

$$\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n) = \mathbf{X}_n^2(\hat{\theta}_n) + \mathbf{X}_n^T(\hat{\theta}_n)\mathbf{B}(\hat{\theta}_n)[\mathbf{I}(\hat{\theta}_n) - \mathbf{J}(\hat{\theta}_n)]^{-1}\mathbf{B}^T(\hat{\theta}_n)\mathbf{X}_n(\hat{\theta}_n), \tag{135}$$

where the elements of the matrix $\mathbf{B}(\theta)$ are

$$b_{j1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{p_j(\theta)}}\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \alpha}, \quad b_{j2}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{p_j(\theta)}}\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \beta}, \, j = 1,\, 2,\, \cdots,\, r,$$

and $nJ(\theta) = n\mathbf{B}^T(\theta)\mathbf{B}(\theta)$ is the Fisher's information matrix of the vector of frequencies ν, $n\mathbf{I}(\theta)$ is the Fisher's information matrix of $\mathbf{X}$ and $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha},\, \hat{\beta})^T$ is the MLE's of $\theta = (\alpha,\, \beta)^T$.

The asymptotic behavior of the statistics $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$ is given by the following (see, Nikulin [13])

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n) \geq x | H_0\} = \mathbf{P}\{\chi^2_{r-1} \geq x\}.$$

2. DN test statistic. In 1994, Dzhaparidze and Nikulin [7] proposed a modification of the standard Pearson's test, the test is well-known as Dzhaparidze - Nikulin (DN) test $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ with

$$\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n) = \mathbf{X}_n^2(\hat{\theta}_n) - \mathbf{X}_n^T(\hat{\theta}_n)\mathbf{B}(\hat{\theta}_n)\mathbf{J}^{-1}(\hat{\theta}_n)\mathbf{B}^T(\hat{\theta}_n)\mathbf{X}_n(\hat{\theta}_n), \tag{136}$$

under some regularity conditions of Cramer (see, Cramer [5], Greenwood and Nikulin [10]), we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n) \geq x | H_0\} = \mathbf{P}\{\chi^2_{r-3} \geq x\}.$$

3. McCulloch test statistic. In 1985, McCulloch [12] shown that the statistic

$$\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n) = \mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n) - \mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n), \tag{137}$$

is asymptotically independent of the DN test (see, Voinov et al. [24]) and can be used in its own right, and we have

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n) \geq x | H_0\} = \mathbf{P}\{\chi_2^2 \geq x\}.$$

Note that Hsuan and Robson [11] (also see, Voinov et al. [25], Voinov et al. [26]) have proposed a modification of the standard Pearson's test (133) by using the methods of moments.

From the above theory it seems reasonable to investigate the power of three modified Chi-squared type tests $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$.

3 Power study

The Monte-Carlo method is conducted to investigate the power of $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$ tests for the Logistic Birnbaum-Saunders distribution as null hypothesis against famous alternative like Log-Normal, Log-Logistic, Birnbaum-Saunders and Inverse Gaussian distributions. These distributions are generally used in reliability as the fatigue life distributions.

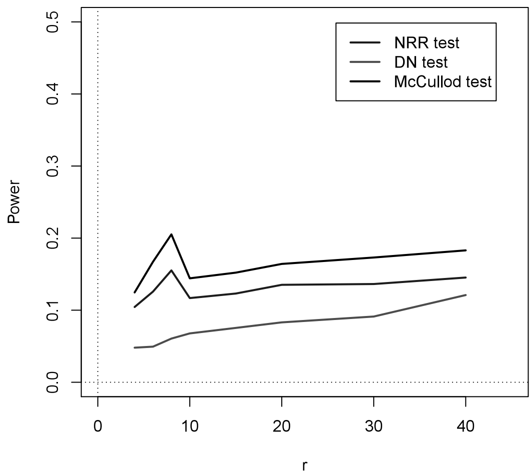


Figure 2: Estimated powers of 3 tests $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$ as function of the number of equiprobable intervals r against Log-Normal distribution alternative. Sample size $n = 200$, significance level $\alpha = 0.05$.

4 Summary and Conclusion

We studied the modified version of the standard Pearson's statistic based on the maximum likelihood estimators for Generalized Birnbaum-Saunders distribution. From Figures 2-4, we see that the DN statistic ($\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$) for equiprobable intervals possesses low power for all alternative distributions. In contrast the NRR ($\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$) and McCulloch ($\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$) test statistics are the most powerful for all alternatives considered and for varying number of intervals r. In the

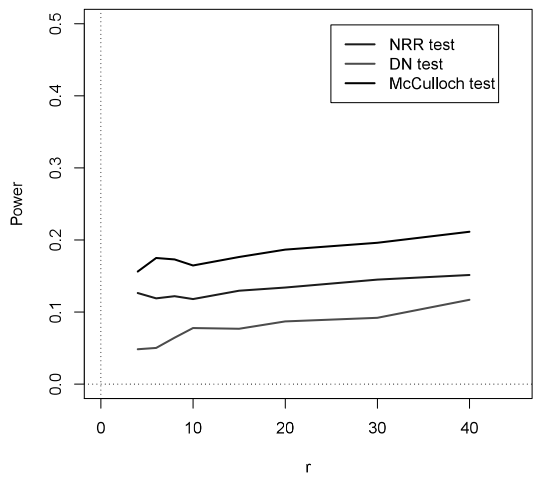


Figure 3: Estimated powers of 3 tests $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$ as function of the number of equiprobable intervals r against Log-Logistic distribution alternative. Sample size $n = 200$, significance level $\alpha = 0.05$.

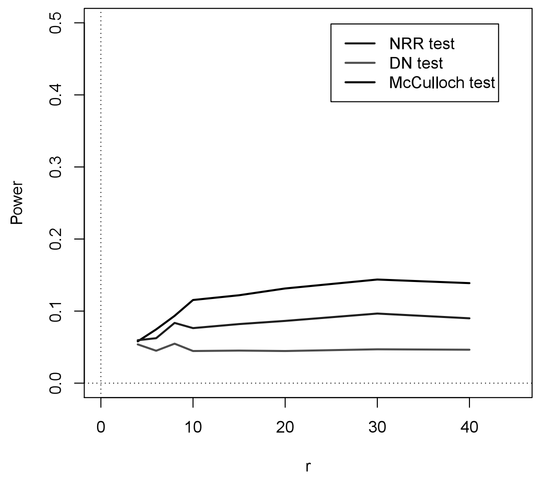


Figure 4: Estimated powers of 3 tests $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$ as function of the number of equiprobable intervals r against Birnbaum-Saunders distribution alternative. Sample size $n = 200$, significance level $\alpha = 0.05$.

case that the number of intervals $r > 40$, we need further investigation because the expected intervals probabilities become small and the limit distribution of above tests can not follow the chi-squared distribution. In reality we often choose the partition r that depends on the sample

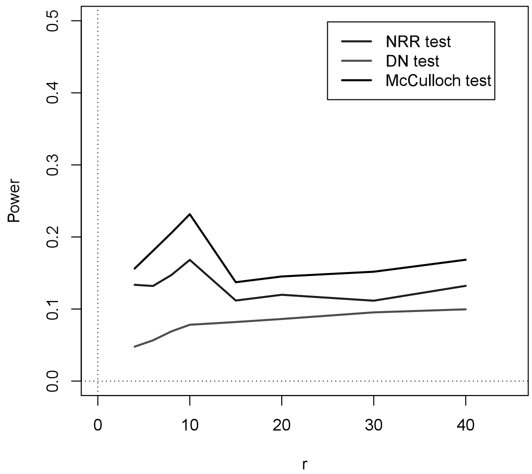


Figure 5: Estimated powers of 3 tests $\mathbf{Y}_n^2(\hat{\theta}_n)$, $\mathbf{U}_n^2(\hat{\theta}_n)$ and $\mathbf{S}_n^2(\hat{\theta}_n)$ as function of the number of equiprobable intervals r against Inverse Gaussian distribution alternative. Sample size $n = 200$, significance level $\alpha = 0.05$.

size and following the recommendations of Greenwood and Nikulin [10]

$$r \leq \min\left(\frac{1}{\alpha}, \ln n\right).$$

Note that to test for the generalized Birnbaum-Saunders family when the data are censored, we use the chi-squared test statistic with the same approach, based on the properties of differences among the numbers of observed and "expected" failures in the intervals. More about the theoretical and mechanism used goodness-of-fit test for generalized Birnbaum-Saunders, one can see Nikulin & Tran [16]. Furthermore, we also suggest utilize the generalized Birnbaum-Saunders as the baseline functions of accelerated lifetime models in the reliability analysis, more about this suggestion, one can see Bagdonavičius et al. [2], Nikulin and Tran [15], Tran [21].

REFERENCES

1. V. Bagdonavičius, J. Kruopis, and M. S. Nikulin. *Non-parametric Tests for Complete Data*, ISTE and Wiley, London, (2011).
2. V. Bagdonavičius, R. Levulienė, M. S. Nikulin, and X. Q. Tran. "On chi-squared type tests and their applications in survival analysis and reliability", *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI - Saint Petersburg*, **408**, (2012), 43–61.
3. Z. W. Birnbaum, and S. C. Saunders. "A new family of life distributions", *Journal of Applied Probability*, (1969), 319–327.

4. R. S. Chhikara, and J. L. Folks. "The Inverse Gaussian distribution as a lifetime model", *Technometrics*, **19**(#4), (1977), 461–468.

5. H. Cramér, "Mathematical Methods of Statistics", Princeton University Press, New York, (1946).

6. J. A. Díaz-García, and V. Leiva-Sánchez. "A new family of life distributions based on Birnbaum–Saunders distribution", *Technical report I-02-17 (PE/CIMAT), Mexico. www. cimat. mx/biblioteca/RepTec*, (2002).

7. K. O. Dzhaparidze, and M. S. Nikulin. "On the computation of chi-square-type statistics", *Journal of Mathematical Sciences*, **75**(#5), (1995), 1910–1921.

8. F. C. Drost. "Asymptotics for generalized chi-square goodness-of-fit tests", *CWI Tracts*, **48**, (1988), 1–104.

9. P. Greenwood, and M. S. Nikulin. "Application of tests of chi-square type", *Journal of Mathematical Sciences*, **43**(#6), (1988), 2776–2791.

10. P. Greenwood, and M. S. Nikulin. "A guide to chi-squared testing", Wiley, New York, (1996).

11. A. Hsuan, and D. S. Robson. "The χ^2-goodness-of-fit tests with moment type estimators", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **5**(#15), (1976), 1509–1519.

12. C. E. McCulloch. "Relationships among some chi-square goodness of fit statistics", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **14**(#3), (1985), 593–603.

13. M. S. Nikulin. "Chi-square test for continuous distributions with shift and scale parameters", *Theory of Probability & Its Applications*, **18**(#3), (1973), 559–568.

14. M. S. Nikulin. "Chi-square test for normality", In: *Proceedings of International Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*, **2**, (1973), 119–122.

15. M. S. Nikulin, and X. Q. Tran. "On chi-squared testing in accelerated trials", *International Journal of Performability Engineering*, **10**(#1), (2014), 53–62.

16. M. S. Nikulin, and X. Q. Tran. "Chi-squared googness of fit tests for Generalized Birnbaum-Saunders models for right censored data and its reliability applications", *Reliability Theory & applications*, **8**(#2), (2013), 7–20.

17. M. S. Nikulin, and L. Gerville-Réache, and X. Q. Tran. "On Chi-squared Goodness-of-fit test for Normality", In Couallier, V. and Gerville-Réache, L. and Huber-Carol, C. and Limnios, N. and Mesbah, M., editors, *Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis*, Wiley Online Library, New York, (2013), 213–227.

18. K. Pearson. "On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **50**(#302), (1900), 157–175.

19. K. C. Rao, and B. S. Robson. "A chi-square statistic for goodness-of-fit tests within the Exponential family", *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **3**(#12), (1974), 1139–1153.

20. A. Sanhueza, V. Leiva, and N. Balakrishnan. "The Generalized Birnbaum-Saunders distribution and its theory, methodology, and application", *Communications in Statictics-Theory and methods*, **37**, (2008), 645–670.

21. X. Q. Tran. "Dynamic regression models and their applications in Survival and Reliability analysis", Ph.D. Thesis, Bordeaux University, France, Supported 26 September (2014).

22. A. W. Van der Vaart. "Asymptotic statistics", Cambridge university press, New York, (1998).

23. V. Voinov, M. S. Nikulin, and N. Balakrishnan. *Chi-squared Goodness of fit tests with applications*, Academic Press, USA, (2013).

24. V. Voinov. *On optimality of the Rao–Robson–Nikulin test*, **72**(#3), (2006), 65–70.

25. V. Voinov, and R. Alloyarova, and N. Pya. "Recent Achievements in Modified Chi-Squared Goodness-of-Fit Testing", In Vonta, F., Nikulin, M., Limnios, N., and Huber, C., editors, *Statistical Models and Methods for Biomedical and Technical Systems*, Birkhuser, Boston, (2008), 241–258.

26. V. Voinov, and N. Pya, and R. Alloyarova. "A comparative study of some modified chi-squared tests", *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **38**(#2), (2009), 355–367.

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.93-100

VỀ ĐỘ ĐO BẤT BIẾN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN

MAI THÀNH TẤN
Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, Quy Nhơn, Bình Định.
Email: mthanhtan@gmail.com

TÓM TẮT

Chúng tôi tổng quan về độ đo bất biến của các phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính; trường hợp hệ không phụ thuộc thời gian trên các không gian Hilbert, dựa trên tỉ lệ giảm mũ của nửa nhóm toán tử liên tục mạnh sinh bởi các toán tử tuyến tính trong một số dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên. Đồng thời cũng áp dụng vào bài toán tuyến tính hóa của một phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến đặt ra trong toán công nghiệp.

Từ khóa: Độ đo bất biến, Phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính, Phương trình vi phân ngẫu nhiên phi tuyến

ABSTRACT

In this paper, we give an overview of invariant measures of linear stochastic differential equations on Hilbert spaces with time independent parameters. We applied to the linearized problem of an non-linear stochastic partial differential equation arising in industrial mathematics.

1 Giới thiệu

Giả sử G, H là các không gian Hilbert khả li. Kí hiệu $L(G,H)$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ G vào H. Không gian $L(H,H)$ được viết gọn là $L(H)$. Toán tử $Q \in L(H)$ luôn giả thiết là toán tử đối xứng, xác định không âm với hạng hữu hạn; trong đó, với hệ cơ sở trực chuẩn $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ của H hạng của toán tử Q là $Tr(Q) := \sum_{n=1}^{\infty}\langle Qe_n, e_n\rangle$. Giả sử $W = (W(t))_{0\le t\le T}$, $0 < T < \infty$, là một quá trình Q-Wiener giá trị trong G trên một không gian xác suất với lọc $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, \mathbb{P})$, chi tiết có thể xem trong [1]. Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên sau

$$\begin{aligned} dX(t) &= \big(LX(t) + F(t)\big)dt + AdW(t), \quad 0 < t \le T,\\ X(0) &= \xi, \end{aligned} \tag{138}$$

trong đó $L : D \subset H \to H$ là toán tử tuyến tính đóng, xác định trù mật trên H, $A \in L(G,H)$, $F = (F(t))_{0\le t\le T}$ là quá trình ngẫu nhiên giá trị trong H khả tích Bochner trên $[0,T]$, và ξ là một biến ngẫu nhiên giá trị trong H, $\mathcal{F}_0$-đo được.

Việc nghiên cứu nghiệm của phương trình dạng (138) đã được quan tâm cứu nhiều, tiêu biểu nhất là tổng hợp các kết quả trong [1]. Trường hợp hệ số phụ thuộc thời gian, tức là khi

Ngày nhận bài: 12/10/2015 ; ngày nhận đăng: 10/6/2016

L được xét bởi họ các toán tử đóng xác định trù mật $(L(t))_{0\leq t\leq T}$, có thể tham khảo các trường hợp khác nhau trong các công trình [6], [8], hoặc [10].

Việc nghiên cứu tính ổn định nghiệm của phương trình dạng (138) của chúng tôi bắt nguồn từ một trường hợp riêng của bài toán phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên được đặt ra trong toán công nghiệp.

Trong bài báo này, chúng tôi tổng quan về độ đo bất biến của các phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính; xây dựng Mệnh đề 6 như là sự tổng hợp các kết quả cơ bản về sự tồn tại và tính duy nhất của độ đo bất biến của phương trình vi phân ngẫu nhiên, dựa trên tỉ lệ giảm mũ của nửa nhóm toán tử liên tục mạnh sinh bởi các toán tử tuyến tính trong một số dạng phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Chúng tôi cũng áp dụng vào bài toán tuyến tính hóa của một phương trình phi tuyến đặt ra trong toán công nghiệp. Trong [5], quá trình rơi của sợi vải dưới tác động của các yếu tố ngẫu nhiên của không khí trong một dây chuyền dệt được mô phỏng bởi phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên sau:

$$\begin{aligned} d_t\partial_t\mathbf{x}(s,t) = \big(&\partial_s(\lambda\partial_s\mathbf{x})(s,t) - b\partial_{ssss}\mathbf{x}(s,t) \\ &- g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}^{\det}(s,t)\big)dt + \sigma d\mathbf{w}(s,t), \quad (s,t)\in[0,l]\times[0,T], \end{aligned} \tag{139}$$

với điều kiện ban đầu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s,0) &= (s-l)\mathbf{e}_3, \\ \partial_t\mathbf{x}(s,0) &= \mathbf{0}, \quad s\in[0,l], \end{aligned} \tag{139a}$$

điều kiện biên

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(l,t) = \mathbf{0}, \quad \partial_s\mathbf{x}(l,t) = \mathbf{e}_3, \\ &\partial_{ss}\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad \partial_{sss}\mathbf{x}(0,t) = \mathbf{0}, \quad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{139b}$$

và cưỡng bức đại số

$$\|\partial_s\mathbf{x}(s,t)\|_{\mathrm{euk}} = 1 \quad \text{for all } (s,t)\in[0,l]\times[0,T]. \tag{139c}$$

Trong đó, $(\mathbf{w}(t))_{0\leq t\leq T}$ là một quá trình ngẫu nhiên Q-Wiener trên không gian xác suất với lọc $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T},\mathbb{P})$ và $\mathbf{x}(\omega):[0,l]\times[0,T]\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $\omega\in\Omega$, mô phỏng sợi vải với chiều dài cung $s\in[0,l]$ và thời điểm $t\in[0,T]$. Hàm $\lambda:[0,l]\times[0,T]\longrightarrow[0,\infty)$ mô tả lực hấp dẫn với điều kiện biên $\lambda(0,t)=0$, $t\in[0,T]$, và $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$. $\mathbf{f}^{\det}:[0,l]\times[0,T]\to\mathbb{R}^3$ là các lực xác định, $0<b,g,\sigma<\infty$ là các hằng số liên quan (gia tốc trọng trường, biên độ các lực ngẫu nhiên, ...). Về mô tả phương trình xác định tương ứng, có thể tham khảo trong [3] và [4].

Chúng tôi xét bài toán tuyến tính hóa phương trình trên, cho trường hợp các toán tử không phụ thuộc vào thời gian, và mô tả chi tiết độ đo bất biến cho phương trình tuyến tính hóa đó.

2 Độ đo bất biến

Xét phương trình tuyến tính với nhiễu

$$\begin{cases} dX(t) = LX(t)\,dt + AdW(t) \\ X(0) = \xi \end{cases} \tag{140}$$

với các giả thiết như sau.

Giả thiết 1. (i) Toán tử L là phần tử sinh của một C_0-nửa nhóm các toán tử tuyến tính $(S(t))_{t\geq 0}$ trên H.

(ii) $\mathrm{Tr}Q_t := \int_0^t \mathrm{Tr}\big(S(r)AQA^*S^*(r)\big)\,dr < \infty,$ với mọi $t \geq 0$.

Khi đó, $S(\cdot) \in L^2((0,T); L_2^0)$ và phương trình (140) có duy nhất nghiệm "mild" được cho bởi

$$X(t) = S(t)\xi + W_L(t), \quad t \geq 0,$$

với

$$W_L(t) = \int_0^t S(t-r)dW(r),$$

xem [1].

Ta xét các tính chất đặc biệt của nghiệm $(X(t))_{t\geq 0}$ khi t lớn. Khái niệm *"độ đo bất biến"* (*"invariant measure"*) của (140) đóng vai trò quan trọng trong việc xem xét một số tính chất nghiệm của (140). Độ đo μ trên không gian đo được $(H, \mathfrak{B}(H))$ được gọi là một độ đo bất biến dưới hàm đo được $f : H \longrightarrow H$ nếu với mọi $O \in \mathfrak{B}(H)$, ta có

$$\mu(f^{-1}(O)) = \mu(O).$$

Trong [1], để định nghĩa độ đo bất biến của phương trình (140) hàm đo được f được xây dựng từ nghiệm $X(\cdot,\xi)$ của (140) như sau.

Gọi $B_b(H)$ ($C_b(H)$ t.ư.) là không gian các phiếm hàm Borel bị chặn (liên tục, t.ư.) trên H, cùng với chuẩn "$\sup$". Với mỗi $t \geq 0$, định nghĩa

$$P_t\varphi(x) := \mathbb{E}\varphi(X(t,x)), \quad \varphi \in B_b(H),\ t \geq 0,\ x \in H. \tag{141}$$

Theo [1, Cor. 9.9 và Cor. 9.10], với mọi $\varphi \in B_b(H)$ và $0 \leq r \leq t \leq T$ ta có

$$P_t(P_r\varphi)(x) = P_{t+r}\varphi(x), \quad x \in H.$$

Do đó, họ $(P_t)_{0\leq t\leq T}$ được gọi là *nửa nhóm chuyển tiếp* (transition semigroup) tương ứng với phương trình (140).

Định nghĩa 2. Độ đo xác suất μ được gọi là một độ đo bất biến của phương trình (140) nếu với mọi $\varphi \in B_b(H)$ ta có

$$\int_H P_t\varphi(x)\mu(dx) = \int_H \varphi(x)\mu(dx).$$

Mệnh đề 3. *Nếu μ là độ đo bất biến của phương trình (140) sao cho luật của giá trị ngẫu nhiên ban đầu $\mathcal{L}(\xi) = \mu$, thì nghiệm mild $X(\cdot,\xi)$ của phương trình (140) là một quá trình dừng.*

Chứng minh. Xem [1, Prop. 11.5]. □

Định lý 4. *Giả sử các mệnh đề trong Giả thiết 1 được thỏa mãn. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương.*

(i) Tồn tại một độ đo bất biến của phương trình (140).

(ii) Tồn tại một toán tử hạch, đối xứng xác định không âm $P \in L(H)$ sao cho

$$2\langle PL^*x, x\rangle + \langle Qx, x\rangle = 0, \text{ với mọi } x \in D(L^*). \tag{142}$$

(iii) $\sup_{t\geq 0} \mathrm{Tr}Q_t := \sup_{t\geq 0}\int_0^t \mathrm{Tr}\big(S(r)AQA^*S^*(r)\big)dr < \infty$*, với tích phân tồn tại theo nghĩa mạnh.*

Chứng minh. Xem [1, Theo. 11.7]. □

Định lí sau đưa ra một điều kiện đủ về tính duy nhất của độ đo bất biến.

Định lý 5. *Nếu với mọi $x \in H$, giới hạn $\lim_{t\to+\infty}\|S(t)x\|$ là 0 hoặc $+\infty$, thì phương trình (140) có nhiều nhất một độ đo bất biến.*

Chứng minh. Xem [1, Prop. 11.10]. □

Mệnh đề 6. *Giả sử $(S(t))_{t\geq 0}$ là C_0-nửa nhóm các toán tử tuyến tính bị chặn trên H sao cho tồn tại các hằng số $M \geq 1, m > 0$ thỏa mãn $\|S(t)\| \leq Me^{-mt}$ với mọi $t \geq 0$. Khi đó, phương trình (140) có duy nhất độ đo bất biến.*

Chứng minh. Vì $(S(t))_{t\geq 0}$ là nửa nhóm sinh bởi toán tử A trên không gian Hilbert H nên $(S^*(t))_{t\geq 0}$ cũng là nửa nhóm với phần tử sinh A^*. Do đó, Giả thiết 1 được thỏa mãn và tồn tại nghiệm mild $X(\cdot,\xi)$ của phương trình (140).

Mặt khác, vì tồn tại các hằng số $M \geq 1, m > 0$ sao cho $\|S(t)\| \leq Me^{-mt}$ với mọi $t \geq 0$ nên ta thu được mệnh đề (iii) của Định lí 4 và đồng thời cũng thỏa mãn giả thiết của Định lí 5. Do đó, tồn tại duy nhất độ đo bất biến của phương trình (140). □

Nhận xét 7. *Nếu một C_0-nửa nhóm $(S(t))_{t\geq 0}$ trên không gian Hilbert H thỏa mãn*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-mt} \quad \text{với mọi } t \geq 0,$$

trong đó M và m là các hằng số dương thì ta nói $(S(t))_{t\geq 0}$ là ổn định dạng mũ hoặc giảm (tốc độ) mũ với tỉ lệ giảm m. Như trong Mệnh đề 6, một C_0-nửa nhóm giảm mũ là tương đối "tốt" để có thể mô tả một số tính chất nghiệm của các phương trình vi phân ngẫu nhiên trên không gian Hilbert H. Một tiêu chuẩn để kiểm tra C_0-nửa nhóm toán tử là giảm mũ được trình bày như trong [7] như sau.

Định lý 8. *Một C_0-nửa nhóm $(S(t))_{t\geq 0}$ là giảm mũ nếu và chỉ nếu tồn tại $1 \leq p < \infty$*

$$\int_0^\infty \|S(r)u\|^p \, dr < \infty \quad \text{với mọi } u \in H.$$

Chứng minh. Xem [7, Theo. 4.4.1]. □

3 Ứng dụng

Trong phần này, chúng ta chính qui phương trình vi phân ngẫu nhiên với hệ số hằng với tham số τ thích hợp. Xét phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên (139) cho trường hợp $\lambda(s,t) = \lambda_0(s) > 0$ với mọi $(s,t) \in (0,l) \times [0,T]$ và $\lambda_0(0) = \lambda_0(l) = 0$ cùng với tham số $\tau > 0$ có dạng tổng quát như sau

$$\begin{cases} dX(t) &= (L_0 + L_{\lambda_0} - \tau Id)X(t)\,dt + AdW(t), \quad 0 < t \leq T \\ X(0) &= \xi. \end{cases} \tag{143}$$

Ta xét các điều kiện trên tham số τ sao cho phương trình (143) có duy nhất độ đo bất biến và mô tả cụ thể độ đo bất biến ấy.

Xét phương trình (143) trên không gian Hilbert $H = H^{2,2}_{bc}(0,l) \times L^2(0,l)$, trong đó

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -b\partial_{ssss} & 0 \end{pmatrix},\ L_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_s(\lambda_0(s)\partial_s) & 0 \end{pmatrix},\ A = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}, W(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{w}(t) \end{pmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra được $L_{\lambda_0} \in L(H)$ và $(L_0, \mathcal{D})$ là phần tử sinh của một C_0-nửa nhóm toán tử thu hẹp (semigroup of contractions), với $\mathcal{D} := H^{4,2}_{bc}(0,l) \times H^{2,2}_{bc}(0,l)$ là miền xác định của L_0,

$$H^{2,2}_{bc}(0,l) := \{ \in H^{2,2}((0,l);\mathbb{R}^3) \big| \mathbf{v(l)} = \partial_\mathbf{s}\mathbf{v(l)} = \mathbf{0}\},$$

và

$$H^{4,2}_{bc}(0,l) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H^{4,2}}((\mathbf{0},\mathbf{l});\mathbb{R}^\mathbf{3}) \big| \mathbf{v(l)} = \partial_\mathbf{s}\mathbf{v(l)} = \partial_\mathbf{ss}\mathbf{v(0)} = \partial_\mathbf{sss}\mathbf{v(0)} = \mathbf{0}\}. \tag{144}$$

Nhận xét 9. *Toán tử* $(\partial_{ss}, H^{2,2}_{bc}(0,l))$ *không là toán tử tự liên hợp trên* $L^2(0,l)$. *Tuy nhiên, theo các điều kiện biên như trong (144) và sử dụng công thức tích phân từng phần ta có*

$$\langle \partial_{ss}\mathbf{u}, \partial_{ss}\mathbf{v}\rangle_{\mathbf{L^2(0,l)}} = \langle \partial_{ssss}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{L^2(0,l)}} \quad \text{với mọi } \mathbf{u} \in \mathbf{H^{4,2}_{bc}(0,l)}, \mathbf{v} \in \mathbf{H^{2,2}_{bc}(0,l)}.$$

Theo nhận xét trên và với các chuẩn định nghĩa trên không gian $H^{2,2}_{bc}(0,l)$ và trên $H^{4,2}_{bc}(0,l)$ như sau

$$\|\cdot\|^2_{H^{2,2}_{bc}(0,l)} = b\|\partial_{ss}(\cdot)\|^2_{L^2(0,l)} \quad \text{và} \quad \|\cdot\|^2_{H^{4,2}_{bc}(0,l)} = b^2\|\partial_{ssss}(\cdot)\|^2_{L^2(0,l)},$$

ta có

$$\left\langle L_0\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\rangle_H = 0 \quad \text{với mọi } \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \in \mathcal{D}. \tag{145}$$

Mặt khác, với mọi $\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \in H$ ta có

$$\begin{aligned}\left\langle L_{\lambda_0}\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\rangle_H &= \left\langle \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \partial_s(\lambda_0(s)\partial_s\mathbf{u})\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\rangle_H = \langle \partial_s(\lambda_0(s)\partial_s\mathbf{u}), \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{L^2(0,l)}}\\ &\le \sup_{s\in[0,l]}\left(\lambda_0(s)^2 + l(\partial_s\lambda_0(s))^2\right)\left(\frac{1}{b}\|\mathbf{u}\|^2_{H^{2,2}_{bc}(0,l)} + \|\mathbf{v}\|^{\mathbf{2}}_{\mathbf{L^2(0,l)}}\right) \\ &\le \max\{\frac{c}{b}, c\}\left\|\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\|^2_H, \text{ trong đó } c := \sup_{s\in[0,l]}\left(\lambda_0(s)^2 + l(\partial_s\lambda_0(s))^2\right).\end{aligned} \tag{146}$$

Đặt $m := \max\{\frac{c}{b}, c\}$, theo (145) và (146) ta có

$$\left\langle \left((L_0 + L_{\lambda_0} - \tau Id) - (m-\tau)Id\right)\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\rangle_H \le 0 \quad \text{với mọi } \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \in \mathcal{D}.$$

Do đó, với mọi $\alpha > (m-\tau)$ ta có

$$\left\|\left(\alpha Id - (L_0 + L_{\lambda_0})\right)\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\|^2_H \ge (\alpha - (m-\tau))^2\left\|\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix}\right\|^2_H \quad \text{với mọi } \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \in \mathcal{D}. \tag{147}$$

Theo [7], toán tử $\left((L_0 + L_{\lambda_0} - \tau Id), \mathcal{D}\right)$ là phần tử sinh của một C_0-nửa nhóm $(S_\tau(t))_{t\ge 0}$ trên H. Kết hợp với (147), nửa nhóm $(S_\tau(t))_{t\ge 0}$ thỏa mãn

$$\|S_\tau(t)\| \le e^{(m-\tau)t} \quad \text{với mọi } t \ge 0. \tag{148}$$

Mệnh đề 10. *Nếu* $\tau > m$, *với* m *là hằng số trong* (148), *tồn tại duy nhất một độ đo bất biến của phương trình (143).*

Chứng minh. Mệnh đề 10 được suy ra từ (148) kết hợp với Mệnh đề 6. □

Tiếp theo là vấn đề mô tả độ đo bất biến của (143). Chú ý rằng nếu $(S(t))_{t\ge 0}$ là C_0-nửa nhóm sinh bởi toán tử $(L_0 + L_{\lambda_0}, \mathcal{D})$ thì C_0-nửa nhóm sinh bởi toán tử $(L_0 + L_{\lambda_0} - \tau Id, \mathcal{D})$ là $(S_\tau(t))_{t\ge 0}$ với $S_\tau(t) = e^{-\tau t}S(t)$ với mọi $t \ge 0$.

Trước tiên, theo các giả thiết của λ_0 và các điều kiện biên, toán tử $\Lambda := -b\partial_{ssss}+\partial_s(\lambda_0(s)\partial_s)$: $\mathcal{D} \subset L^2(0,l) \longrightarrow L^2(0,l)$ là xác định âm và tự liên hợp. Mặt khác, nếu $\mathbf{u} \in \mathcal{D}$ thỏa mãn $\Lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ thì $\langle \Lambda\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$, do đó $\langle \partial_{ssss}\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = 0$ và $\langle \partial_s(\lambda_0(s)\partial_s\mathbf{u}), \mathbf{u}\rangle = 0$. Theo Định lí nhúng Sobolev, ta suy ra $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, tức là Λ là đơn ánh.

Lưu ý rằng, vì toán tử $-\Lambda$ là xác định dương và tự liên hợp nên toán tử $\sqrt{-\Lambda}$ cũng vậy. Theo [9, Theo. VIII.5], các hàm toán tử sine và cosine theo $\sqrt{-\Lambda}$ là hoàn toàn xác định. Như trong [2, Exam. 6.2], C_0-nửa nhóm $(S(t))_{t\geq 0}$ sinh bởi $(L_0 + L_{\lambda_0}, \mathcal{D})$ được mô tả như sau

$$S(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{-\Lambda}) & \sqrt{-\Lambda}^{-1}\sin(t\sqrt{-\Lambda}) \\ -\sqrt{-\Lambda}\sin(t\sqrt{-\Lambda}) & \cos(t\sqrt{-\Lambda}) \end{pmatrix},$$

với

$$S(t)\begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{u} + \sqrt{-\Lambda}^{-1}\sin(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{v} \\ -\sqrt{-\Lambda}\sin(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{u} + \cos(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{v} \end{pmatrix} \quad \text{với mọi} \begin{pmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{pmatrix} \in H.$$

Trong đó, với $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là hệ cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert $L^2(0,l)$ thỏa mãn $\Lambda\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó, các hàm toán tử sine và cosine có biểu diễn như sau

$$\begin{aligned}\cos(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{u} + \sqrt{-\Lambda}^{-1}\sin(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{v} = &\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\cos(\sqrt{-\lambda_\mathbf{n}}\mathbf{t})\langle\mathbf{u},\mathbf{e_n}\rangle\mathbf{e_n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{-\lambda_n}}\sin(\sqrt{-\lambda_n}t)\langle\mathbf{v},\mathbf{e_n}\rangle\mathbf{e_n},\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}-\sqrt{-\Lambda}\sin(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{u} + \cos(t\sqrt{-\Lambda})\mathbf{v} = &-\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\sqrt{-\lambda_\mathbf{n}}\sin(\sqrt{-\lambda_\mathbf{n}}\mathbf{t})\langle\mathbf{u},\mathbf{e_n}\rangle\mathbf{e_n} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\cos(\sqrt{-\lambda_n}t)\langle\mathbf{v},\mathbf{e_n}\rangle\mathbf{e_n}.\end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$S_\tau(t) = e^{-\tau t}S(t) = e^{-\tau t}\begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{-\Lambda}) & \sqrt{-\Lambda}^{-1}\sin(t\sqrt{-\Lambda}) \\ -\sqrt{-\Lambda}\sin(t\sqrt{-\Lambda}) & \cos(t\sqrt{-\Lambda}) \end{pmatrix}.$$

Theo [1, Theo. 11.7], với mỗi $\tau > m$, phương trình (143) có duy nhất độ đo bất biến $\mu = \mathfrak{N}(0, \overline{P}_\tau)$ với toán tử phương sai $\overline{P}_\tau$ được xác định bởi

$$\overline{P}_\tau x := \int_0^\infty S_\tau(r)AQA^*S_\tau^*(r)x\,dr, \quad \text{với mọi } x \in H.$$

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia, Mã số

101.02-2014.32

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. DaPrato and J. Zabczyk. Stochastic equations in infinite dimensions. Ency- clopedia of Mathematics and its Applications, 44. Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
2. M. Kovacs and S. Larsson. Introduction to stochastic partial differential equations. Proceedings of "New Directions in the Mathematical and Computer Sciences". National Universities Commission, Abuja, Nigeria, (2007).
3. N. Marheineke. Modified FEM for fibre-fluid interactions. Diploma thesis, Uni- versity of Kaiserslautern, (2001).
4. N. Marheineke and R. Wegener. Fiber dynamics in turbulent flows: general modeling framework. SIAM J. Appl. Math., 66(5):1703–1726, (2006).
5. N. Marheineke and R. Wegener. Fiber dynamics in turbulent flows: specific taylor drag. SIAM J. Appl. Math., 68(1):1–23, (2007).
6. R. Manthey and T. Zausinger. Stochastic evolution equations in $L_\rho^{2\nu}$. Stochastic and Stochastic Rep., 66(1–2):37–85, (1999).
7. A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, (1983).
8. C. Prévôt and M. Röckner. A concise course on stochastic partial differential equations. Lecture Notes in Mathematics, 1905. Springer, Berlin, (2007).
9. M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis. Second edition. Academic Press, New York-London, (1980).
10. M. Veraar and J. Zimmerschied. Non-autonomous stochastic Cauchy problems in Banach spaces. Studia Math., 185(1):1–34, (2008)

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.101-115

DẠY HỌC XÁC SUẤT - THỐNG KÊ THEO HƯỚNG ĐẢM BẢO CHUẨN ĐẦU RA CHO SINH VIÊN KHỐI NGÀNH KINH TẾ Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC LẠC HỒNG

TRẦN VĂN HOAN

Phòng Đào tạo, Trường Đại học Lạc Hồng, số 10 Huỳnh Văn Nghệ, P. Bửu Long, TP. Biên Hòa, Đồng Nai.

Email: *tranhoan.math@gmail.com*

TÓM TẮT

Xây dựng chuẩn đầu ra với yêu cầu cao là một nội dung đổi mới quan trọng trong công tác giáo dục và đào tạo ở Trường Đại học Lạc Hồng. Trong chuẩn đầu ra này, các yêu cầu về kiến thức và kỹ năng nghề nghiệp cần được trang bị cho sinh viên khi ra trường được nêu rõ. Dựa trên cơ sở phân tích thực trạng dạy học Xác suất - Thống kê ở trường, chúng tôi đã đưa ra các biện pháp rèn luyện các kỹ năng này cho sinh viên khối ngành kinh tế, hướng đến giảng dạy môn học đáp ứng chuẩn đầu ra đã xây dựng. Cụ thể hướng đến rèn luyện các kỹ năng sau: Kỹ năng giải quyết vấn đề; kỹ năng thu thập, biểu diễn và xử lý số liệu thống kê; kỹ năng ứng dụng công nghệ thông tin; kỹ năng tư duy tựa thuật giải; kỹ năng tự học . . .

Từ khóa: Chuẩn đầu ra, Kinh tế, Kỹ năng nghề nghiệp, Môn Xác suất - Thống kê.

ABSTRACT

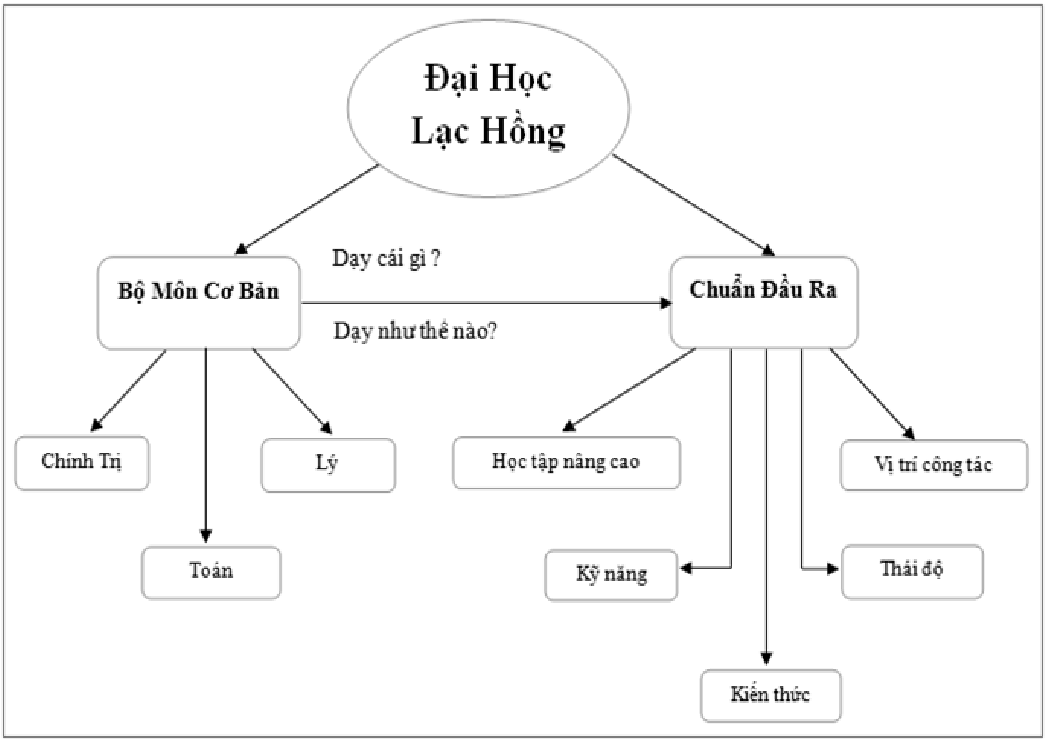
Teaching Probability-Statistics orients to ensure the standard learning outcomes for economic majored students at Lac Hong University. Constructing standard learning outcomes with high demands is an important innovative content in the education and training at Lac Hong university. The knowledge and career skills equipped for students before they graduate from university are clearly stated . Based on the analysis of the current situation of teaching of Probability-Statistics course at school. We have given out some measures to train this skill of economic-majored students, which aims at teaching this subject in order to meet the build standard learning outcomes, such as: problem solving; gathering, representing and processing statistic numbers; application of information technology; algorithm-like thinking; self-learning, etc.

1 Mở đầu

Nâng cao chất lượng, đổi mới trong giáo dục đào tạo là tiêu chí sống còn đối với một trường đại học trong thời đại khoa học công nghệ hiện nay. Việc đổi mới là xu thế tất yếu của thời đại và theo chiến lược phát triển giáo dục được báo cáo tại Đại hội Đảng lần thứ XI "Phát triển giáo dục là quốc sách hàng đầu. Đổi mới căn bản, toàn diện nền giáo dục Việt Nam theo hướng chuẩn hóa, hiện đại hóa, xã hội hóa, dân chủ hóa và hội nhập quốc tế" [3].

Hướng theo đó, một trong những nội dung đổi mới quan trọng ở Trường Đại học Lạc Hồng thực hiện trong thời gian qua là xây dựng chuẩn đầu ra với yêu cầu cao.

Ngày nhận bài: 15/6/2015 ; ngày nhận đăng: 19/5/2016



Hình 1: Sơ đồ vai trò môn Cơ bản đối với chuẩn đầu ra của trường Đại học Lạc Hồng.

Trong chuẩn đầu ra này, các yêu cầu về kiến thức và kỹ năng nghề nghiệp cần trang bị cho sinh viên (SV) khi ra trường được nêu rõ. Tuy nhiên, một câu hỏi lớn được đặt ra "Các kỹ năng nghề nghiệp của SV được trang bị và rèn luyện như thế nào thông qua quá trình học tập các môn thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản và kiến thức đại cương?".

2 Vai trò và thực trạng dạy học môn học Xác suất – Thống kê (XSTK) đối với yêu cầu của chuẩn đầu ra ở Trường Đại học Lạc Hồng

2.1 Những nội dung trong chuẩn đầu ra với yêu cầu cao

Một trong những công việc quan trọng nhất được thực hiện trong thời gian qua ở trường đó là xây dựng chuẩn đầu ra với yêu cầu cao của mỗi chuyên ngành đào tạo. Qua nhiều lần chỉnh sửa, đến nay chuẩn đầu ra của nhà trường được hoàn thiện với sự góp ý của nhiều doanh nghiệp, sở, ban ngành trên địa bàn. Từ sứ mạng của nhà trường và các cuộc khảo sát hàng năm, nhà trường xây dựng "Chuẩn đầu ra 2012" [8], bao gồm:

- Kiến thức;

- Kỹ năng;
- Thái độ;
- Vị trí và khả năng công tác sau khi tốt nghiệp;
- Khả năng học tập và nâng cao trình độ sau khi tốt nghiệp.

Trong chuẩn đầu ra này, các yêu cầu về kỹ năng nghề nghiệp cần được trang bị cho SV khi ra trường được nêu rõ. Chẳng hạn, đối với SV chuyên ngành kinh tế thì các yêu cầu về kỹ năng như sau:

- Tổ chức các hoạt động thương mại và các nghiệp vụ liên quan phù hợp với hệ thống luật pháp quốc gia và quốc tế;
- Tiếp cận giao dịch với các đối tác trong và ngoài nước;
- Nghiên cứu thị trường để đề ra các chính sách thích hợp cho việc thâm nhập, mở rộng thị phần trên các thị trường xuất nhập;
- Phối hợp các bộ phận trong doanh nghiệp liên quan đến hoạt động xuất nhập khẩu;
- Nhận diện và quản lí rủi ro trong các hoạt động xuất nhập khẩu;
- Soạn thảo văn bản, trình bày và báo cáo;
- Giao tiếp tốt;
- Sử dụng thành thạo tin học văn phòng và sử dụng tốt một số phần mềm chuyên ngành cho lĩnh vực quản trị, kinh tế;
- Giải quyết vấn đề, tư duy phản biện, phân tích lập luận đánh giá các quy trình và đưa ra giải pháp hợp lí;
- Làm việc theo nhóm, kỹ năng lãnh đạo, nắm bắt và tổ chức thực hiện công việc độc lập;
- Lắng nghe, quan sát và ra quyết định;
- Thích ứng với môi trường cao.

Như vậy, việc trang bị và rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp cho sinh viên được xác định là nhiệm vụ vô cùng quan trọng và phải thực hiện lâu dài, xuyên suốt quá trình đào tạo. Tuy nhiên, một câu hỏi lớn được đặt ra "Các kỹ năng nghề nghiệp của SV được trang bị và rèn luyện như thế nào thông qua quá trình học tập các môn thuộc lĩnh vực khoa học cơ bản và kiến thức đại cương?".

Để trả lời câu hỏi này cần phải có thời gian nghiên cứu nhằm tìm ra cách thức dạy và học các môn khoa học cơ bản, đáp ứng chuẩn đầu ra với yêu cầu cao như đã nêu trên.

2.2 Vai trò của môn học XSTK đối với chuẩn đầu ra

Môn học XSTK là một môn thuộc khối kiến thức cơ bản và ngày nay các kiến thức thuộc về mảng này đã thâm nhập vào hầu hết các lĩnh vực và các ngành khoa học khác nhau. Các tri thức về khoa học xác suất cũng như thống kê đã được ứng dụng một cách rộng rãi. Đây là một trong những học phần quan trọng của khối kiến thức cơ bản mà Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quy định là môn học bắt buộc đối với SV khối ngành kinh tế, y dược, hóa, môi trường⋯

Hơn nữa, với đặc thù là môn Toán ứng dụng nên bên cạnh việc rèn luyện các kỹ năng cơ bản mang tính toán học như: khái quát hóa, đặc biệt hóa, mô hình hóa, phát hiện và giải quyết vấn đề⋯ thì việc học XSTK còn góp phần rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp gắn với SV ngành kinh tế, như: kỹ năng thu thập, xử lí số liệu thống kê; kỹ năng quan sát; kỹ năng phân tích, ra quyết định thông qua các bài toán ước lượng, kiểm định; kỹ năng làm việc nhóm⋯ Những kỹ năng này là một phần không nhỏ trong yêu cầu về kỹ năng nghề nghiệp đối với SV khối ngành kinh tế mà "chuẩn đầu ra" của nhà trường đã đặt ra. Nhưng, nên dạy học XSTK như thế nào để có thể góp phần đáp ứng chuẩn đầu ra ở Trường Đại học Lạc Hồng thì hiện nay vẫn còn là câu hỏi chưa có câu trả lời.

Từ đó cho thấy cần phải có những nghiên cứu nhằm đáp ứng yêu cầu "Rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp cho SV khối ngành kinh tế qua việc dạy học môn XSTK ở Trường Đại học Lạc Hồng".

2.3 Thực trạng dạy học môn học XSTK ở Trường Đại học Lạc Hồng

Trong [4] đã chỉ ra rằng, việc dạy học môn học XSTK ở trường còn tồn tại những hạn chế chủ yếu sau đây:

- Việc rèn luyện các kĩ năng giải quyết vấn đề chưa được thể hiện nhiều trong bài giảng. Đa số giảng viên đều giảng dạy theo phương pháp truyền thống là chủ yếu (nêu tri thức và áp dụng tri thức để giải các bài tập cụ thể), dẫn đến chưa rèn luyện kĩ năng giải quyết vấn đề cho sinh viên.

- Chưa gắn việc kiểm tra đánh giá với nội dung thực tiễn môn học. Chẳng hạn các đề kiểm tra, thi cuối kì vẫn mang nhiều tính chất của toán học và được áp dụng cho tất cả các chuyên ngành đào tạo, chưa có sự cài đặt các bài toán mang tính ứng dụng trong thực tiễn nghề nghiệp cho sinh viên đối với các ngành nghề cụ thể.

- Chưa ứng dụng công nghệ thông tin trong dạy học một cách có hiệu quả. Hiện nay ở trường, đa số giảng viên chỉ dừng lại ở việc hướng dẫn sinh viên tính toán các bảng số liệu thống kê bằng máy tính bỏ túi mà chưa sử dụng công cụ là phần mềm Excel để giải các bài toán về ước lượng, kiểm định⋯

- Chưa phát huy khả năng tự học, khả năng làm việc tập thể của sinh viên thông qua các bài tập nhóm, bài tập lớn ở nhà. Hiện tại, nhà trường chưa biên soạn hệ thống bài tập lớn của môn học, dẫn đến việc rèn luyện các kĩ năng trên chưa được thực hiện đối với môn học này.

Từ thực trạng trên, chúng tôi nhận thấy rằng việc nghiên cứu "Rèn luyện kĩ năng nghề nghiệp cho sinh viên khối ngành kinh tế thông qua việc dạy học môn học XSTK ở Trường Đại học Lạc Hồng" là yêu cầu cấp thiết.

3 Một số biện pháp rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp thông qua dạy học XSTK cho SV khối ngành kinh tế

3.1 Những định hướng xây dựng các biện pháp

Thứ nhất, các biện pháp sư phạm được đề xuất phải dựa vào nền tảng nội dung, chương trình học phần XSTK cho SV khối ngành kinh tế ở trường Đại học Lạc Hồng.

Thứ hai, các biện pháp sư phạm đề xuất phải phù hợp với mục tiêu dạy học, phù hợp với quan điểm dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề, xu thế đổi mới phương pháp dạy học hiện nay.

Thứ ba, các biện pháp sư phạm đề xuất phải tạo ra những khó khăn, chướng ngại, mang tính vừa sức để SV có thể tham gia vào quá trình giải quyết những vấn đề thực tiễn gắn với kinh tế dẫn đến hình thành tri thức mới và rèn luyện các kỹ năng.

Thứ tư, hệ thống các biện pháp sư phạm phải đảm bảo tính kích thích hứng thú học tập của SV, nhằm phát huy tính tích cực và năng lực trí tuệ của SV.

Thứ năm, các biện pháp sư phạm đề xuất cần dựa vào vốn tri thức đã có của SV, có tính khả thi và thông qua hệ thống các biện pháp SV phải thấy được vai trò của của mình trong việc tạo ra cũng như tiếp thu và áp dụng tri thức mới cụ thể vào chuyên ngành kinh tế.

3.2 Một số biện pháp rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp thông qua dạy học XSTK cho SV khối ngành kinh tế

Biện pháp 1. Dạy học các nội dung kiến thức mới thông qua xây dựng các bài toán mở đầu liên quan đến kinh tế.

a. Mục đích, ý nghĩa

Trước một bài toán hay một tình huống cụ thể giáo viên (GV) đặt ra, hoạt động giải quyết vấn đề của SV sẽ được thực hiện, họ phải tìm hiểu, suy nghĩ để nhận diện vấn đề; tìm cách giải quyết những vấn đề đó. Từ đó SV sẽ tự rút ra công thức, tự chứng minh định lí, tìm cách ghi nhớ tích cực những vấn đề cần lĩnh hội, tự tìm ra cách giải hay và gọn những bài toán lí thuyết hay thực hành,⋯ Kết quả là SV lĩnh hội được tri thức toán học và học được cách tự khám phá.

Biện pháp này góp phần rèn luyện kỹ năng giải quyết vấn đề cho SV, đặc biệt là các vấn đề gắn với thực tiễn của sinh viên khối ngành kinh tế.

b. Cách thực hiện

Trong giảng dạy môn học, mỗi nội dung kiến thức mới được trình bày bắt đầu bằng một tình huống hay một bài toán cụ thể liên quan đến kinh tế. Việc phân tích tình huống thông qua các câu hỏi gợi vấn đề sẽ làm kích thích suy nghĩ của SV và giúp SV tự tìm ra các kiến thức, qua đó có thể tiếp thu dễ dàng. Chẳng hạn tình huống dạy học công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes sau:

GV nêu bài toán. Có ba lô hàng mỗi lô có 20 sản phẩm, trong đó lô thứ i có $i+2$ phế phẩm ($i = 1, 2, 3$), còn lại là chính phẩm. Chọn ngẫu nhiên một lô hàng, rồi từ lô hàng đó lấy ngẫu nhiên ra 2 sản phẩm. Tính các xác suất sau:

a) Hai sản phẩm lấy ra là hai phế phẩm.

b) Chọn được lô hàng thứ hai, biết rằng hai sản phẩm lấy ra là hai phế phẩm.

(1) Hãy xác định phép thử của bài toán?

CTLMĐ: Bài toán có 2 phép thử, thứ nhất : chọn 1 lô hàng, thứ hai : lấy ra 2 sản phẩm từ lô hàng đã chọn.

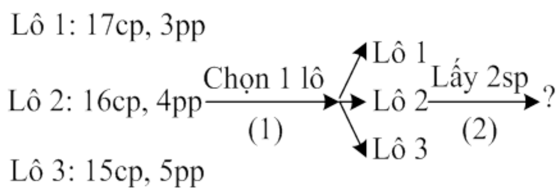
(2) Phép thử thứ nhất (chọn một lô hàng) có bao nhiêu trường hợp xảy ra?

CTLMĐ: Có ba trường hợp, được lô thứ nhất, thứ hai hoặc lô thứ ba ?

(3) Như vậy phép thử trên sẽ tạo thành các biến cố có tính chất gì?

CTLMĐ: Các biến cố tạo thành hệ biến cố đầy đủ.

GV minh họa bằng sơ đồ sau:



Gọi A_i "Chọn được lô hàng thứ i", $i = 1, 2, 3$.

Suy ra $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ và $\{A_1, A_2, A_3\}$ là hệ biến cố đầy đủ.

Gọi A "Hai sản phẩm lấy ra là hai phế phẩm"

(4) Có bao nhiêu trường hợp để A xảy ra?

CTLMĐ: Có 3 trường hợp (lấy 2 phế phẩm từ lô 1, lô 2 hoặc lô 3).

(5) Mỗi trường hợp A xảy ra có bao nhiêu giai đoạn?

CTLMĐ: 2 giai đoạn

- Giai đoạn 1 : Chọn lô hàng

- Giai đoạn 2 : Lấy 2 phế phẩm từ lô hàng tương ứng

(6) Sử dụng quy tắc cộng và quy tắc nhân hình thành công thức của P(A)?

CTLMĐ: $P(A) = P(A_1).P\left(\dfrac{A}{A_1}\right) + P(A_2).P\left(\dfrac{A}{A_2}\right) + P(A_3).P\left(\dfrac{A}{A_3}\right)$

(7) Phát biểu công thức trên ở dạng tổng quát?

(8) Yêu cầu ở câu b của bài toán được tính dựa vào công thức nào đã biết ?

CTLMĐ: Công thức xác suất có điều kiện.

(9) Hãy xác định các biến cố đề bài yêu cầu?

CTLMĐ: “Hai sản phẩm lấy ra là hai phế phẩm” là biến cố A ; “chọn được lô hàng thứ 2” là biến cố A2. Như vậy đề bài yêu cầu tính $P\left(\dfrac{A_2}{A}\right) = \dfrac{P(A_2A)}{P(A)}$.

(10) Dựa vào các trường hợp đã tính A, hãy tìm kết quả cho $P(A_2A)$?

CTLMĐ: $P\left(A_2A\right) = P(A_2)P\left(\dfrac{A}{A_2}\right)$. GV hình thành công thức Bayes cho SV.

(11) Khi nào sử dụng công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes?

GV củng cố: Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes thường được sử dụng để tính xác suất của các biến cố của hai phép thử liên tiếp, kết quả của phép thử thứ nhất được sử dụng cho phép thử thứ hai và phép thử thứ nhất tạo ra hệ biến cố đầy đủ.

Biện pháp 2. Tăng cường các ví dụ và bài tập theo hướng vận dụng XSTK giải quyết các vấn đề cụ thể đặt ra trong kinh tế

a. Mục đích, ý nghĩa

Thực tiễn đóng vai trò quyết định của quá trình nhận thức, là tiêu chuẩn chân lí của Toán học cũng như các khoa học khác. Tính thực tiễn của Toán học thể hiện qua ứng dụng của Toán học vào trong thực tiễn đời sống. Thực tiễn còn có vai trò quan trọng trong việc hình thành cho SV kỹ năng giải quyết vấn đề vì nó là môi trường rất thuận lợi cho SV rèn luyện, phát triển kỹ năng, kỹ xảo và nắm vững kiến thức đã học.

Biện pháp này góp phần phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề bao gồm: Phân tích vấn đề, hiểu vấn đề, chọn lựa và xác định giải pháp, thực thi giải pháp, đánh giá kết quả.

b. Cách thực hiện

Trong quá trình giảng dạy, GV đưa ra các ví dụ và bài tập ứng dụng theo hướng vận dụng từng nội dung kiến thức giải quyết các bài toán đặt ra cụ thể về kinh tế. Điều này không những giúp SV hứng thú hơn trong học tập mà còn cho SV thấy được các kiến thức về XSTK như công cụ được sử dụng để giải quyết các vấn đề liên quan đến thực tiễn nghề nghiệp của họ sau này. Chẳng hạn các ví dụ áp dụng cụ thể sau:

• Vận dụng các công thức tính xác suất đưa ra các nhận định, dự đoán

Ví dụ. Trước khi đưa sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó và thấy có 34 người trả lời “sẽ mua”, 97 người trả lời “có thể sẽ mua”

Bảng 1: Bảng nhu cầu của cuốn niên giám.

Nhu cầu (j) cuốn	20	21	22	23	24	25
Xản suất (P_j)	0,3	0,25	0,18	0,14	0,1	0,03

và 69 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỷ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời trên là: 70%; 30% và 1%.

a) Hãy đánh giá thị trường tiềm năng của sản phẩm đó.

b) Trong số khách hàng thực sự mua sản phẩm thì có bao nhiêu phần trăm trả lời "sẽ mua".

• **Vận dụng các phân phối xác suất đặc biệt trong kinh tế**

Ví dụ (áp dụng phân phối chuẩn). Khả năng thu hồi nợ của các cán bộ tín dụng ở một ngân hàng là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn với mức thu hồi trung bình là 30 tỷ. Biết rằng khả năng thu hồi được trên 36 tỷ là $11,51\%$.

a) Tính xác suất để một cán bộ tín dụng thu hồi được từ 26 tỷ đến 32 tỷ.

b) Biết rằng khả năng trả nợ của khách hàng dưới 24 tỷ là 0,8, từ 24 tỷ đến 36 tỷ là 0,6 và trên 36 tỷ là 0,4. Tính xác suất để một cán bộ tín dụng thu hồi được nợ.

c) Ngân hàng trả thưởng cho cán bộ thu hồi được nợ dưới 24 tỷ là 10 triệu đồng, từ 24 tỷ đến 36 tỷ là 15 triệu đồng và trên 36 tỷ là 20 triệu đồng. Mức tiền thưởng trung bình của cán bộ tín dụng là bao nhiêu?

• **Vận dụng ý nghĩa kỳ vọng trong lựa chọn phương án đầu tư, kinh doanh**

Ví dụ. Giả sử một cửa hàng sách dự định nhập một số cuốn niên giám thống kê. Nhu cầu hàng năm của cuốn niên giám này được cho trong bảng sau:

Cửa hàng mua với giá 7 ngàn/cuốn bán với giá 10 ngàn/cuốn. Song đến cuối năm phải hạ giá bán hết với giá 4 ngàn/cuốn. Cửa hàng muốn xác định số lượng nhập sao cho lợi nhuận kỳ vọng lớn nhất?

• Vận dụng ý nghĩa của phương sai để đánh giá mức độ rủi ro trong đầu tư kinh doanh

Ví dụ. Một nhà đầu tư đang cân nhắc giữa việc đầu tư vào hai dự án A và B trong hai lĩnh vực độc lập nhau. Khả năng thu hồi vốn sau 2 năm (tính bằng %) của hai dự án là các biến ngẫu nhiên có bảng phân phối xác suất như sau:

Bảng 2: Bảng dự án A.

X_A	65	67	68	69	70	71	73
$P(X_A)$	0,04	0,12	0,16	0,28	0,24	0,08	0,08

Hãy đánh giá khả năng và mức độ rủi ro thu hồi vốn của 2 dự án đầu tư trên?

• **Bài toán áp dụng ước lượng, kiểm định giải quyết các vấn đề cụ thể trong kinh tế như:**

Bảng 3: Bảng dự án B.

X_B	66	68	69	70	71
$P(X_B)$	0,12	0,28	0,32	0,20	0,08

- Kiểm tra, đánh giá lợi nhuận trung bình, hiệu quả của một phương pháp cải tiến trong sản xuất, kinh doanh.
- Ước lượng về chi tiêu, thu nhập trung bình, từ đó đưa ra những quyết định điều chỉnh hợp lý.
- Kiểm tra, đánh giá chất lượng sản sản phẩm so với công bố của doanh nghiệp,...

Ví dụ. Điều tra về mức chi tiêu (CT) (triệu đồng) ngẫu nhiên 160 SV ngoại tỉnh ở trường Đại học Lạc Hồng thu được bảng số liệu sau:

Bảng 4: Bảng mức chi tiêu hàng tháng của SV Đại học Lạc Hồng

CT	1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	3
Số SV	5	3	2	1	27	6	7	3	60	2	6	4	4	23	1	1	5

a) Hãy ước lượng mức chi tiêu trung bình hàng tháng của SV ngoại tỉnh trường Đại học Lạc Hồng?

b) Hiện nay tỷ lệ SV ngoại tỉnh của Đại học Lạc Hồng có mức chi tiêu là 1,4 triệu đồng/tháng khoảng 60%. Hãy kiểm tra khẳng định trên với mức ý nghĩa 5%?

Như vậy sau ví dụ, SV sẽ hiểu rõ hơn về mức chi tiêu hàng tháng. Hơn nữa, SV có thể so sánh mức chi tiêu của mình với mức chi tiêu trung bình, từ đó giúp họ thay đổi thói quen chi tiêu để có một mức chi tiêu hợp lí nhất trước tình hình giá cả leo thang như hiện nay.

Biện pháp 3. Rèn luyện cho sinh viên khả năng biểu diễn, xử lý số liệu và hình thành các biểu tượng thống kê

a. Mục đích, ý nghĩa

Thống kê là khoa học nghiên cứu các hiện tượng ngẫu nhiên có tính chất số lớn trên cơ sở thu thập và xử lý các số liệu thống kê – các kết quả quan sát. Như vậy nội dung chủ yếu của thống kê là xây dựng các phương pháp thu thập và xử lý các số liệu thống kê nhằm rút ra các kết luận khoa học và thực tiễn.

Vai trò của thống kê có thể thấy rõ đối với toàn xã hội, không chỉ ở phạm vi quốc gia mà cả trong phạm vi khu vực và toàn cầu. Số liệu thống kê được sử dụng thường xuyên trên mọi bình diện, mọi lĩnh vực của đời sống xã hội, từ xây dựng kế hoạch và hoạch định chính sách của quốc gia đến những cuộc hội thảo, các công trình nghiên cứu, giảng dạy,⋯ Đặc biệt trong kinh doanh, thống kê được sử dụng để : Thông báo cho công chúng, dự báo cho việc lập kế hoạch và ra quyết định⋯ Nhưng thực tế giảng dạy thống kê cho thấy SV chưa thật hứng thú khi học phần này.

Biện pháp này sẽ góp phần rèn luyện cho SV kỹ năng thu thập, biểu diễn và xử lý số liệu thống kê.

b. Nội dung và cách thức

Trong quá trình lên lớp GV nên dành một số thời gian nhất định để giới thiệu một số ví dụ có nội dung thực tiễn nhằm giúp cho SV bước đầu hình thành các biểu tượng trực quan về thống kê và biết cách biểu diễn, xử lý các số liệu. GV cần làm cho SV thấy được tầm quan trọng của các khái niệm, các loại sơ đồ, biểu đồ, bảng biểu, đồ thị...trong thống kê toán. Một số loại biểu tượng trong thống kê toán cần được trang bị cho SV khi học học phần XS – TK như sau:

• Hình thành biểu tượng trực quan về bảng tần số, bảng tần suất

GV cần phân biệt cho SV vai trò, cách sử dụng bảng tần số và tần suất trong việc biểu diễn số liệu. Chẳng hạn, ví dụ sau: Một giống lợn A được nuôi thử nghiệm ở một trang trại. Để đánh giá chất lượng, người ta cân trọng lượng của đàn lợn sau khi xuất chuồng và thu được kết quả mô tả trong Bảng 5.

Bảng 5: Bảng trọng lượng của giống lợn A.

Trọng lượng (kg)	85	87	88	89	90	91	93	95	
Tần số	10	20	25	20	12	8	13	13	$N = 121$

Với bảng tần số này, ta có thể so sánh được tỷ lệ số số lợn có trọng lượng 68kg so với số lợn có trọng lương 71kg chẳng hạn. Khái niệm tần suất trong tình huống này chưa thật sự cần thiết. Nhưng, nếu vấn đề là có hai giống lợn A và B cùng được đưa vào nuôi thử nghiệm và qua số liệu về trọng lượng khi xuất chuồng dưới đây ta cần đưa ra quyết định chọn giống lợn nào đưa vào nuôi đại trà thì khái niệm tần suất là cần thiết.

Bảng 6: Bảng trọng lượng của hai giống lợn A và B.

Trọng lượng (kg)	85	87	88	89	90	91	93	95	
Tần số (giống A)	10	20	25	20	12	8	13	13	$N = 121$
Tần số (giống B)	14	22	30	30	15	7	11	12	$N = 139$

• Hình thành các biểu tượng trực quan về đồ thị, biểu đồ Ở đây cần phân tích cho SV vai trò và cách sử dụng các biểu đồ phù hợp với yêu cầu mỗi bài toán. Có thể lập bảng phân tích đặc trưng của các dạng đồ thị thống kê như trong Bảng 7.

Hơn nữa khi dạy phần này, GV có thể đặt ra một bài tập lớn về nhà cho SV như sau: Tại sao khi đã thu thập được số liệu về mẫu thì phải sắp xếp chúng lại và mô tả theo một hình thức nào đó? Hãy phân tích ưu điểm của các hình thức mô tả sau:

(1) Bảng phấn phối tần số

(2) Bảng phân phối tần số tích lũy

(3) Bảng phân phối tần suất

Bảng 7: Bảng trọng lượng của hai giống lợn A và B.

Đồ thị thống kê	Tình huống sử dụng		Đặc trưng
	Đặc điểm dãy dữ liệu	Mục đích sử dụng	
Biểu đồ đoạn thẳng và biểu đồ hình cột	Biến định tính hoặc định lượng rời rạc	So sánh sự phổ biến của các giá trị khác nhau trong dãy dữ liệu	Chiều cao (hoặc chiều dài) cột tỉ lệ số lượng phần tử ứng với từng giá trị của biến quan sát
Biểu đồ hình quạt	Các thành phần trong một tổng thể	- Mô tả cấu trúc thành phần cơ cấu của dữ liệu - So sánh tỷ trọng giữa các thành phần	Diện tích hình quạt tỉ lệ với tần số (tần suất) của các thành phần trong dãy dữ liệu.
Biểu đồ tần số	Biến định lượng (liên tục) với khoảng chứa tất cả các giá trị quan sát được chia ra thành một số đoạn có chiều dài là h và tại mỗi đoạn đưa vào các tần số ni.	- Xem xét phân bố dữ liệu - So sánh hai mẫu số liệu - Dự đoán đường cong hàm mật độ lý thuyết	Là một hình thang tạo nên bởi nhiều hình chữ nhật có đáy bằng h và chiều cao bằng $\frac{n_i}{h}$.
Biểu đồ tần suất	Biến định lượng (liên tục) với khoảng chứa tất cả các giá trị quan sát được chia ra thành một số đoạn có chiều dài là h và tại mỗi đoạn đưa vào các tần suất f_i.	- Xem xét sự tiến triển của mật độ (tần số, tần suất). - So sánh hai dãy số liệu - Dự đoán đường cong hàm mật độ lý thuyết	Là một hình thang tạo nên bởi nhiều hình chữ nhật có đáy bằng h và chiều cao bằng $\frac{f_i}{h}$.

Bảng 8: Bảng trọng lượng của lợn có dùng thuốc tăng trọng.

Trọng lượng (kg)	65	67	68	69	70	71	73
Số con	1	3	4	7	6	2	2

(4) Đồ thị hình cột

(5) Đồ thị hình bánh xe

(6) Đường đa giác

• Hình thành biểu tượng trực quan về giá trị trung bình, phương sai mẫu, độ lệch mẫu

Dạy học phần này cần làm cho SV hiểu ý nghĩa và cách sử dụng từng tham số đặc trưng ở trên. Chẳng hạn, ví dụ sau: Tại một trại nuôi lợn người ta áp dụng thử một loại thuốc tăng trọng bổ sung vào khẩu phần thức ăn của lợn. Sau khi nuôi ba tháng thu được kết quả mô tả trong các Bảng 8 và 9. Lập bảng tính toán các giá trị ta thu được:

Mẫu 1: $\bar{x} = 69,16; s^2 = 3,2233$; Mẫu 2: $\bar{x} = 59,92; s^2 = 7,5767$.

Như vậy thông qua giá trị trung bình về trọng lượng sau 3 tháng tuổi và mức độ phân tán của trọng lượng so với trọng lượng trung bình ta thấy được hiệu quả của thuốc tăng trọng.

Biện pháp 4. Hướng dẫn sinh viên sử dụng phần mềm Excel giải các bài toán thống kê

Bảng 9: Bảng trọng lượng của lợn không dùng thuốc tăng trọng.

Trọng lượng (kg)	55	56	58	59	60	62	63	65	67
Số con	1	2	4	5	6	3	2	1	1

a. Mục đích, ý nghĩa

Với sự bùng nổ của công nghệ thông tin (CNTT) như hiện nay đã và đang tác động rất lớn vào môi trường giáo dục. Do đó việc nghiên cứu, sử dụng các công cụ của CNTT để áp dụng vào giải các bài toán sẽ mang lại nhiều lợi ích thiết thực. Hơn nữa, thông qua việc giải các bài toán bằng cách dùng các công cụ CNTT hỗ trợ sẽ bước đầu hình thành và phát triển tư duy thuật giải cho SV. Đây là một dạng tư duy cần được trang bị cho SV trong thời đại hiện nay.

b. Cách thực hiện

Trong quá trình giảng dạy bên cạnh việc hướng dẫn SV sử dụng máy tính bỏ túi để tính các tham số đặc trưng của mẫu, thì GV cần hướng dẫn sinh viên thực hiện các bài toán thống kê như: bài toán ước lượng, kiểm định bằng phần mềm Excel. Sử dụng Excel để phân tích thống kê bởi vì:

- Excel sẵn có ở các văn phòng
- Excel đủ mạnh để giải quyết các vấn đề thống kê thường gặp
- Người sử dụng có thể hiểu được ý nghĩa của các vấn đề thống kê

Ví dụ. (Sử dụng Excel giải bài toán ước lượng mức chi tiêu trung bình của sinh viên trường Đại học Lạc Hồng)

Giải. Gọi μ là mức chi tiêu trung bình hàng tháng của SV ngoại tỉnh ở trường Đại học Lạc Hồng. Ta sẽ ước lượng μ với độ tin cậy 95%.

Bước 1: Lập bảng tính các tham số đặc trưng của mẫu (trung bình mẫu và độ lệch mẫu hiệu chỉnh).

Bước 2: Tính độ chính xác của ước lượng bằng hàm confidence

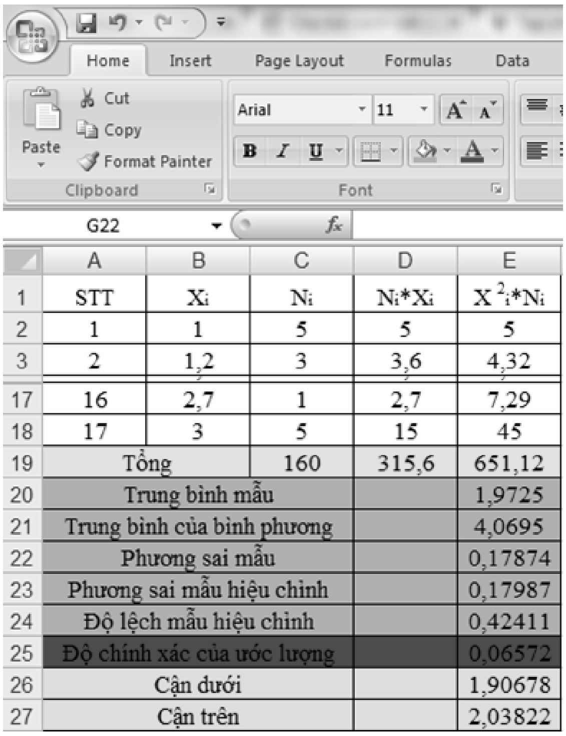
$$\varepsilon = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} = CONFIDENCE(\alpha, s, n)$$

Bước 3: Tìm cận dưới và cận trên của ước lượng $(\bar{x} \pm \varepsilon)$.

Biện pháp 5. Hướng đến xây dựng các quy trình với những bước cụ thể cho mỗi dạng bài toán trong XSTK

a. Mục đích, ý nghĩa

Giải bài tập là một trong những hoạt động có vai trò quan trọng trong dạy học Toán. Do đó GV cần có những biện pháp sư phạm hợp lý để tổ chức có hiệu quả việc dạy bài tập sẽ góp phần nâng cao chất lượng học tập, cũng như giúp cho SV rèn luyện kỹ năng giải quyết vấn đề, mà vấn đề ở đây cụ thể là yêu cầu đặt ra của bài toán. Biện pháp này giúp cho SV rèn luyện được các kỹ năng cần thiết như: liên tưởng, huy động kiến thức, chuyển đổi ngôn ngữ...



	A	B	C	D	E
1	STT	X_i	N_i	N_i*X_i	$X^2_i*N_i$
2	1	1	5	5	5
3	2	1,2	3	3,6	4,32
17	16	2,7	1	2,7	7,29
18	17	3	5	15	45
19	Tổng		160	315,6	651,12
20	Trung bình mẫu				1,9725
21	Trung bình của bình phương				4,0695
22	Phương sai mẫu				0,17874
23	Phương sai mẫu hiệu chỉnh				0,17987
24	Độ lệch mẫu hiệu chỉnh				0,42411
25	Độ chính xác của ước lượng				0,06572
26	Cận dưới				1,90678
27	Cận trên				2,03822

Hình 2: Bảng minh họa sử dụng Excel trong bài toán ước lượng.

b. Cách thực hiện

GV hướng đến việc trình bày cách giải các bài toán cụ thể dưới dạng quy trình. Điều này sẽ làm tăng khả tăng tự học của SV. Hơn nữa, thông qua các quy trình đó, những kiến thức sẽ được ghi nhớ lâu hơn và dễ dàng áp dụng khi cần thiết.

Trong quá trình lên lớp trong các giờ dạy giải bài tập, GV đưa các ví dụ điển hình, thực hành làm mẫu cho SV, sau đó đưa ra các dạng toán tương tự hoặc liên quan, yêu cầu SV tìm ra quy trình giải cho từng dạng toán.

Chẳng hạn với bài toán **tính xác suất bằng định** nghĩa được thực hiện theo quy trình gồm các bước sau:

Bước 1: Xác định và đặt tên cho biến cố cần tính xác suất.

Bước 2: Xác định phép thử của biến cố và tính số biến cố sơ cấp của phép thử.

Bước 3: Tính số biến cố sơ cấp thuận lợi cho biến cố cần tính xác suất.

Bước 4: Dùng công thức xác định xác suất trong định nghĩa để tính xác suất.

Hay với bài toán **tính xác suất sử dụng công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes** ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi biến cố cần tính xác suất.

Bước 2: Phân tích chỉ ra một hệ biến cố đầy đủ.

Bước 3: Sử dụng công thức đầy đủ, Bayes để tính toán.

Bước 4: Kết luận.

Ví dụ. Hướng dẫn SV giải bài toán Biết rằng xác suất để mỗi sản phẩm được sản xuất ra từ dây chuyền I, II, III, IV là phế phẩm tương ứng là 5%, 8%, 4% và 10%. Từ một lô gồm 10 sản phẩm của dây chuyền I, 15 sản phẩm của dây chuyền II, 7 sản phẩm của dây chuyền III và 8 sản phẩm của dây chuyền IV, lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm.

a) Tính xác suất để nhận được phế phẩm.

b) Giả sử đã biết sản phẩm nhận được là phế phẩm, hãy cho biết sản phẩm đó có khả năng được sản xuất từ dây chuyền nào là lớn nhất?

Bước 1: Gọi A "Sản phẩm lấy ra là phế phẩm".

Bước 2: Gọi Di "Sản phẩm lấy ra do dây chuyền i sản xuất", $i = 1, 2, 3, 4$. Khi đó $\{D_1, D_2, D_3$,D$_4\}$ tạo thành hệ biến cố đầy đủ, với: $P(D_1) = 0,25$, $P(D_2) = 0,375(0)$, $P(D_3) = 0,175$, $P(D_4) = 0,2$, $P\left(D_4/A\right) = 0,2878 = 28,78\%$.

Bước 3: Áp dụng công thức tính toán.

a) Áp dụng công thức xác suất đầy đủ $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{4} P(D_i).P\left(\dfrac{A}{D_i}\right)$ $=0,0695 = 6,95\%$

b) Áp dụng công thức Bayes

$$P\left(\frac{D_i}{A}\right) = \frac{P(D_i)P(A/D_i)}{P(A)}$$

ta được $P\left(D_1/A\right) = 0,1799 = 17,99\%$; $P\left(D_2/A\right) = 0,4317 = 43,17\%$;

Bước 4: Vậy sản phẩm đó có khả năng được sản xuất bởi dây chuyền II là cao nhất.

Tương tự GV hướng dẫn sinh viên tìm ra quy trình cho các bài toán: **Tính xác suất áp dụng công thức cộng, nhân, có điều kiện; ước lượng các tham số của tổng thể; kiểm định giả thuyết thống kê...**

4 Kết luận và kiến nghị

Như vậy các biện pháp trên đã bước đầu định hướng việc giảng dạy môn học XSTK với mục đích rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp cho SV khối ngành kinh tế được quy định trong chuẩn đầu ra với yêu cầu cao.

Việc rèn luyện các kỹ năng nghề nghiệp được quy định trong chuẩn đầu ra của từng môn học đối với từng chuyên ngành đào tạo hướng đến dạy học đáp ứng chuẩn đầu ra là yêu cầu thực sự cấp thiết. Vì thế, cần có sự nghiên cứu một cách nghiêm túc, lâu dài của các nhà giáo dục nhằm tìm ra cách thức giảng dạy cho mỗi môn học đối với mỗi chuyên ngành đào tạo một cách phù hợp nhất. Nếu làm được điều đó thì có thể tin rằng công tác đổi mới trong giáo dục và đào tạo ở Trường Đại học Lạc Hồng sẽ có một bước tiến mới, hiệu quả và vững chắc.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ Giáo dục – Đào tạo, *Kỉ yếu Hội thảo "Tập huấn quốc gia về phát triển kĩ năng nghề nghiệp cho sinh viên sư phạm qua hệ thống trường thực hành"*, NXB Giáo dục, (2012).
2. Trần Văn Hoan, *Thực trạng dạy học môn Xác suất – Thống kê so với chuẩn đầu ra ở Trường Đại học Lạc Hồng*, Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP TP.HCM, Số 59 (93), tr. 165-169, (2014).
3. Trần Văn Hoan, *Một số đề xuất biên soạn giáo trình môn học Xác suất – Thống kê theo định hướng rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp cho sinh viên khối ngành kinh tế ở trường Đại học Lạc Hồng*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ Trường ĐH Đà Nẵng, Số 4 (89), (2014).
4. Trần Văn Hoan, *Một số biện pháp phát triển kỹ năng giải quyết vấn đề thông qua dạy học Xác suất – Thống kê cho sinh viên khối ngành kinh tế ở trường Đại học Lạc Hồng*, Tạp chí Khoa học Trường ĐH Huế, (đã nhận đăng), (2015).
5. *Báo cáo thực hiện quy chế công khai của Trường Đại học Lạc Hồng năm học 2012 – 2013*, Trường ĐH Lạc Hồng, (2012).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.117-128

DI SẢN SÁCH TOÁN HÁN NÔM: MỘT SỐ TÌM HIỂU BAN ĐẦU

ĐOÀN THỊ LỆ[1], TẠ DUY PHƯỢNG[2*] VÀ CUNG THỊ KIM THÀNH[3]
[1,3]Cao học Hán Nôm, Khoa Văn, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.
[2]Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học & Công nghệ Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Cầu Giấy, Hà Nội.
*Email: tdphuong@math.ac.vn

TÓM TẮT

Dựa trên kết quả khảo sát bước đầu kho di sản Hán Nôm ở Việt Nam, bài viết trình bày tổng quan các nghiên cứu về Toán học Việt Nam thời kì Trung đại và toàn bộ di sản sách Toán Hán Nôm hiện tồn; từ đó đề xuất một số vấn đề định hướng nghiên cứu, khai thác di sản sách Toán viết bằng chữ Hán và chữ Nôm.
Từ khóa: Lịch sử toán học, Hán Nôm

ABSTRACT

The purpose of this paper is to provide a brief description of the Vietnamese mathematical treatises from the 15th to the beginning of the 20th century.

1 Tổng quan các tài liệu viết về toán học Việt Nam thời Trung đại

Những người đầu tiên viết về toán học và thiên văn học Việt Nam có lẽ là những nhà truyền giáo, nhà buôn và nhà du lịch, thám hiểm phương tây. Nhà du lịch vòng quanh thế giới W. Dampier là người nước ngoài đầu tiên nhắc tới toán học Việt Nam. Ông đã viết về người Tonkin (Bắc Kì) như sau: *Họ rất chú ý tới toán học, có vẻ có hiểu biết chút ít về hình học và số học và hiểu biết về thiên văn học nhiều hơn. Họ có lịch pháp riêng nhưng tôi không rõ là chúng được làm tại đàng ngoài hay được đưa từ Trung Quốc sang* ([16], Bản dịch, trang 80-81).
Một số nhà sử học Việt Nam hoặc các nhà nghiên cứu lịch sử khoa học tự nhiên và lịch sử toán học trên thế giới cũng đã đề cập tới toán học Việt Nam, nhưng rất sơ sài (xem, thí dụ, [9]). Các sách tiếng Việt viết về lịch sử toán học cũng gần như không đề cập tới lịch sử toán học Việt Nam thời Trung đại (xem, thí dụ, [14], [15]).

Một cách tiếp cận khoa học, giúp giải mã nhiều câu hỏi hiện nay còn mở, là hướng tìm hiểu lịch sử toán học Việt Nam thế kỉ XV-XIX qua khai thác trực tiếp di sản sách toán Hán Nôm. Vào năm 1943, Học giả Hoàng Xuân Hãn đã viết một bài nghiên cứu về ma phương (xem [5]) dựa trên phương pháp của Nguyễn Hữu Thận (xem [A22]). Ông cũng viết một bài về *thi toán đời xưa* (xem [4]) và đặc biệt, cuốn chuyên khảo *Lịch và Lịch Việt Nam* in năm 1982 [6] (sau được in lại nhiều lần, xem, thí dụ, [7]) là một trong ba công trình được giải thưởng Hồ Chí Minh của Ông.

Ngày nhận bài: 17/6/2015 ; ngày nhận đăng: 19/3/2016

Có lẽ người nước ngoài đầu tiên quan tâm nghiên cứu lịch sử toán học ở Việt Nam qua sách toán Hán Nôm là nhà toán học Nhật Bản Mikami Yoshio (1875-1950). Dựa trên cuốn *Chỉ minh toán pháp* do nhà dân tộc học Nobuhiro Matsumoto mang về từ Việt Nam năm 1933, Mikami Yoshio đã viết một bài báo tiếng Nhật ([23], 1934) với tiêu đề *Về một tác phẩm toán của An Nam*, phân tích nội dung *Chỉ minh toán pháp*. Tuy nhiên, vẫn chưa rõ *Chỉ minh toán pháp* mà Mikami Yoshio nghiên cứu có đúng là cuốn *Chỉ minh lập thành toán pháp* của Phan Huy Khuông ([A2], 1820) hay không. Cũng không rõ cuốn *Chỉ minh toán pháp* mà Mikami Yoshio nghiên cứu hiện nay vẫn còn được lưu giữ ở Nhật Bản hay không (xem [32]).

Năm 1938, nhà nghiên cứu lịch sử toán học và khoa học tự nhiên người Trung Quốc Zhang Yong (1911-1939) đã phát hiện mảng sách toán Hán Nôm trong kho sách của Viện Viễn đông Bác cổ. Tuy nhiên, Ông mất năm 1939 và không kịp để lại những nghiên cứu về các sách toán Việt Nam, ngoại trừ một bài báo về thiên văn Việt Nam ([22], 1940). Năm 1954, Li Yan 李儼 [19] đã thống kê (8 cuốn) các sách toán Hán Nôm mà Zhang Yong mang về từ Việt Nam. Dựa trên tư liệu này, Han Qi 韩琦 [18] đã viết một bài báo về quan hệ giữa toán và thiên văn Việt Nam với toán và thiên văn Trung Hoa. Giáo sư Tạ Ngọc Liễn đã viết một bài về toán học Việt Nam trong [10]. Gần đây, Nguyễn Xuân Diện và Tạ Duy Phượng đã viết một số bài giới thiệu các sách toán Hán Nôm (xem [2], [3], [13], [17]).

Có thể nói, cho tới nay, Alexei Volkov là người duy nhất thành công và thành danh trong nghiên cứu lịch sử toán học Việt Nam thời Trung đại. Ông đã viết khoảng 40 bài nghiên cứu và báo cáo khoa học về Toán học, Thiên văn học và Y học Việt Nam (xem Tài liệu, Mục B). A. Volkov đã sang Việt Nam và Paris nhiều lần, tìm hiểu và nghiên cứu các sách toán Hán Nôm tại thư viện Hán Nôm, thư viện Quốc gia và thư viện Paris. Dưới góc độ của một nhà nghiên cứu lịch sử khoa học, toán học và giảng dạy toán học, Ông đã tóm tắt nội dung hầu hết các sách toán Hán Nôm. Ông đã làm báo cáo mời ở nhiều Hội nghị Quốc tế, được mời viết những bài tổng quan về toán học Việt Nam trong các sách từ điển toán, các sách chuyên khảo về lịch sử toán và các tạp chí (xem, thí dụ, [24]-[36]). Có thể nói, thế giới biết đến toán học Việt Nam thế kỉ XV-thế kỉ XIX là nhờ các bài viết của A. Volkov. Tạp chí Zentralblatt [21] đã đánh giá bài viết [24] của A. Volkov như sau: *This well-researched work of the author is a valuable addition to the history of mathematics.* Nhà nghiên cứu lịch sử thiên văn Nhật Bản Yukio Ãhashi [20] viết: *In 2002, Alexei Volkov published a paper on the Toan- phap dai- thanh. I think that this is a monumental paper on the history of mathematics in Vietnam.*

Qua đây, chúng ta có thể thấy rằng, lịch sử toán học Việt Nam từ lâu đã thu hút sự quan tâm của các học giả trong nước và thế giới. Tuy nhiên, do tình trạng văn bản, do rào cản ngôn ngữ, văn hóa và thời đại,. . . , khiến cho những công trình nghiên cứu ấy vẫn còn cần được bổ sung, hoàn thiện và khai thác, để những tinh hoa cổ xưa được đồng hành trong từng bước tiến của khoa học hiện đại.

2 Tổng quan về di sản sách Toán Hán Nôm

Danh mục sách toán Hán Nôm đã được liệt kê tương đối đầy đủ trong [11], [24], [26], [28] và [36]. Sách toán Hán Nôm hiện nay (khoảng 25 cuốn), chủ yếu nằm trong Thư viện của Viện nghiên cứu Hán Nôm, được lưu trữ dưới dạng sách hoặc microphim gồm 18 cuốn (xem [11]) và đã được tóm tắt nội dung trong [11] và [36]. Trong thư viện Quốc gia có 4 cuốn sách toán Hán Nôm, trong đó có ba cuốn đã được số hóa. Theo A. Volkov [28], tổng số sách toán Hán Nôm trong hai thư viện nói trên, là 22 cuốn, trong đó có 13 cuốn viết bằng chữ Hán, 9 cuốn có cả chữ Hán và chữ Nôm. Ngoài ra còn có hai cuốn ở thư viện Viện Sử học, một số sách giáo khoa, trong đó cũng có một phần nội dung toán học (xem [11]). Một số sách toán Hán Nôm được lưu trữ dưới dạng sách hoặc microphim (MF) tại thư viện Viễn đông Bác cổ (EFEO) Paris. Tuy nhiên, hình như không có cuốn sách nào ở thư viện Paris mà thư viện Hán Nôm không có (xem [11]).

Số sách (8 quyển) mà Zhang Yong mang từ Việt Nam có tên trùng với tên của các sách trong thư viện Hán Nôm (so sánh [18] với [11]). Tuy nhiên, vẫn chưa rõ Zhang Yong đã mua những cuốn sách này hay chép lại từ các cuốn sách đã có trong kho sách của Viễn đông Bác cổ. Và cũng chưa rõ các sách của Zhang Yong có nội dung hoặc năm, nơi xuất bản có khác với các sách trong thư viện Hán Nôm hay không (xem [30]).

Dưới đây là danh mục sách toán Hán Nôm hiện có. Nội dung được trình bày cơ bản theo [11] và [36] với một số bổ sung.

A1. Bút toán chỉ nam 筆算指南

Tác giả: Tuần phủ Quảng Yên Nguyễn Cẩn 阮瑾, hiệu Hương Huề.

Kiều Oánh Mậu 喬瑩懋 , hiệu Áng Hiên, duyệt.

In năm Duy Tân thứ 3 (1909), Hà Nội.

Có 2 bản in, 178 trang, khổ 26x15, có hình vẽ.

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 299.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A. 1031; VHv 282; MF. 2318 (A.1031);

Mã hiệu thư viện Paris: EFED. MF. II/1/52.

Bút toán chỉ nam gồm 5 chương (5 quyển 卷). Chương 1 trình bày chi tiết bốn phép tính số học dưới dạng như hiện nay (khác với trước đây người Việt thường sử dụng que tính và bàn tính). Chương 2 *Tạp toán* chứa 21 bài toán khác nhau (sử dụng phép chia, lập phương trình,. . .). Chương 3 trình bày các bài toán đo ruộng đất (hình giới hạn bởi các đoạn thẳng hoặc các đường cong). Chương 4 trình bày phép khai căn bậc hai và bậc ba. Chương 5 là các bài toán giải tam giác vuông nhờ sử dụng định lí Pithagoras và áp dụng vào các bài toán thực tế (đo chiều cao, đo khoảng cách,. . .). Cuốn sách này đã được chúng tôi dịch và biên tập sơ bộ.

A2. Chỉ minh lập thành toán pháp 指明 立成算法

Tác giả: Lão phố Phan Huy Khuông 潘輝框.

Soạn năm Minh Mệnh thứ nhất (1820).

Có 2 bản viết, 1 mục lục, có hình vẽ, sơ đồ, có chữ Nôm.

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 433;

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: VHv 1185, 184 trang, khổ 29x17;

A. 1240: 218 trang, 31x21; EFEO sao lại từ bản VHv.1185.

MF. 2391 (A. 1290). Paris. EFEO. MF. II/1/89.

Cuốn sách mở đầu bằng hình vẽ bàn tính và bảng lũy thừa của 10, đơn vị tiền tệ, các đơn vị đo độ dài, thể tích, diện tích và thể tích. Sau đó là các bài toán tính diện tích các hình giới hạn bởi các đường thẳng hoặc đường cong. Đặc biệt, cuốn sách chứa *một bài toán thi giả định* (bài toán được soạn tương tự như đề thi) đã được dịch sang tiếng Việt bởi Hoàng Xuân Hãn ([4], 1943) và sang tiếng Anh bởi A. Volkov ([31], 2012). Hiện nay chưa tìm thấy một đề thi toán thật sự nào, vì vậy có thể coi đây là một tư liệu quí trong tìm hiểu giảng dạy toán học thời xưa.

A3. Cửu chương lập thành tính pháp 九章立成併法

Chúng tôi tìm thấy năm quyển sách trùng tên 九章立成併法 sau đây.

Quyển 1: Tác giả: Phạm Hữu Chung 范有鍾, tự là Phúc 福, soạn.

In lần đầu vào năm Vĩnh Thịnh Quí Tị (1713).

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 638.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm hoặc Paris: AB 173, 56 trang, khổ 20x14. Đây là cuốn sách toán Việt Nam cổ nhất (in năm 1713) hiện còn được lưu giữ. Cuốn sách trình bày các bài toán dưới dạng ca Nôm, không chia thành các chương và chứa bảng nhân, tính cộng trừ nhân chia, tính diện tích các hình phẳng (đa giác, tròn, bán nguyệt,. . .), tính toán với mẫu số chung và bài toán phân bổ tỉ lệ, các bài toán dạng sai kép,. . . Cuốn sách cũng chứa các bài toán được viết dưới dạng truyền thống: Bài toán-Đáp số-Lời giải. Theo Hoàng Xuân Hãn [4], cuốn sách này được viết dựa theo cuốn *Đại thành toán pháp* của Lương Thế Vinh và đã được sử dụng làm sách luyện thi trong một thời gian dài. Ngoài ra còn có bốn quyển 九章立成併法 sau đây.

Quyển 2: Mã hiệu thư viện Hán Nôm: AB 563, 44 trang, khổ 17x13. Paris BN.B.29 Vietnamien.

Quyển 3: Thư viện chùa Thắng Nghiêm. Số ảnh: 43.

Quyển 4: Thư viện gia đình Ông Lê Mai Bửu (Thanh Hóa). Mã hiệu: B275.

Quyển 5: Thư viện Viện Thông tin Khoa học Xã hội. Mã hiệu:ISSI HN00000959.

Hai cuốn đầu được liệt kê trong [11] là *Cửu chương lập thành toán pháp* 九章立成算法.

A4. Cửu chương lập thành toán pháp 九章立成算法

Quyển 1: Tác giả: Phạm Phúc Cẩn 范福堇. Dạng: khắc in. 17 x 12 cm. 22 ảnh.

Thư mục sách Hán Nôm ở Thư viện Quốc gia Hà Nội, 2004: trang 84-85.

Mã hiệu Thư viện Quốc gia: R.1649. Mã hiệu số hóa: NLVNPF-0561.

Đầu sách có bài thơ khuyên kẻ sĩ lưu tâm chuyên chú học môn toán pháp. Nội dung chính gồm các phần mục: Khởi tổng vị pháp [起總謂法], Cửu chương pháp [九章法], Quan điền pháp [官田 法], Tư điền pháp [思田 法], Bình phân pháp [平分法]. Các phép đo tính ruộng đất, . . .

Quyển 2: Kích cỡ: 24 x 13 cm; Số ảnh: 20. Bản viết tay.

Mã hiệu Thư viện Quốc gia: R.120. Mã hiệu số hóa: NLVNPF-0562.

Thư mục sách Hán Nôm ở Thư viện Quốc gia Hà Nội, 2004: trang 84-85.

Năm viết: Thành Thái thập nhất niên (1899).

Nội dung: sách dạy cách làm toán, tính diện tích ruộng, dạng toán đố như bài *Chàng đi thiếp mới trồng cây, chàng về cây đã ra ba bảy cành, một cành ra bảy trăm hoa, thiếp đi giá chợ ba hoa bảy đồng, xin chàng tính lấy cho thông, thời chàng mới được nhập phòng đêm nay. Hỏi bao nhiêu hoa, thành tiền bao nhiêu?* hoặc bài: *Có một cái kho chu vi 36 xích, cao 8 xích, hỏi chứa được bao nhiêu thóc. Giải là ... đáp là ....* Có các bài thơ về phép đo ruộng có kiểu như: kiểu sừng trâu, kiểu mũ, kiểu cong, kiểu gấp khúc, kiểu tròn, kiểu bán nguyệt, ... Cuối sách có các đơn vị đo, đơn vị tiền ...

A5. Cửu chương toán pháp 九章算法

Một tên khác của cuốn sách là *Cửu chương toán pháp lập thành* 九章立成算法.

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 639.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: VNb 30, 150 trang, khổ 21x14;

Tờ cuối cùng ghi bằng mực đỏ: "⋯ Tự Đức tam thập ngũ niên phụng biên" (Viết năm Tự Đức 35, tức năm 1882).

AB. 407, 150 trang, khổ 24x14; Paris BN.B.29 Vietnamien.

Bản này có *Sô học tiểu dẫn* và *Cửu chương toán pháp* bằng chữ Nôm. Nội dung gồm các phép toán số học, bảng tên các số lớn lũy thừa của 10, bảng nhân 9x9, phương pháp khai căn bậc hai, đưa về mẫu số chung, đổi đơn vị đo và đơn vị tiền tệ, tính toán diện tích các hình phẳng, phân bổ đơn giản và phân bổ có trọng. Mục tiếp theo chứa một lượng lớn các bài toán các loại khác nhau, trong đó có một số bài toán giải phương trình, thí dụ, bài toán cổ Trung Hoa về số các con thỏ và con gà có tổng cộng 36 đầu và 100 chân (sau này được biến thể thành bài *Vừa gà vừa chó...* của Việt Nam). Một số bài thơ, ca Hán và Nôm về toán cho dễ học, dễ nhớ.

A6. Đại thành toán học chỉ minh 大成算學指明

Tác giả: Sơn Tây Bố chính sứ Phạm Gia Kỉ 范嘉紀 khởi thảo,

Quốc tử giám tư nghiệp Phạm Gia Chuyên 范嘉瑼 hiệu đính.

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 895.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A 1555, 114 trang, khổ 28x16, có hình vẽ.

Theo [36], cuốn sách chứa 20 mục nhỏ, một số mục khớp với cuốn sách toán kinh điển Trung Hoa *Cửu chương toán thuật*. Thí dụ, mục 16 trình bày phương pháp vị trí sai kép. Nhưng một số phần khác cũng chứng tỏ sự khác biệt. Thí dụ, Mục 1 phân loại 15 khối thẳng chứa 15 dạng khác nhau, hình như không có trong các sách toán Trung Hoa.

A7. Đại thành toán pháp 大成算法

Theo [36], cuốn sách được viết bằng chữ Hán có chứa một số mục viết bằng chữ Nôm. Cuốn sách gồm: các phép toán số học, các đơn vị đo, và một số các bài toán tính diện tích các hình phẳng, phân bổ đơn và phân bổ có lý, tính thuế ruộng, đổi tiền, qui tắc khai căn bậc hai và bậc ba không có trong cuốn sách.

Điều này khẳng định rằng cuốn sách này khác với cuốn *Cửu chương toán pháp* 九章算法 1882, trong đó có mô tả qui tắc khai căn bậc hai và bậc ba, mặc dù hai cuốn sách này được liệt kê chung nhau trong [11].

A8. Lập thành toán pháp 立成算法

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 1847.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: VHv 497.

Có 1 bản viết, 50 trang, khổ 24x13. Có hình vẽ, có chữ Nôm.

Bản viết tay chữ Hán chứa phần nhập đề về các phép toán số học và bảng nhân, sau đó là tính toán diện tích các hình phẳng kèm theo một số hình vẽ. Phần còn lại là các bài toán các dạng khác nhau.

A9. Lập thành toán pháp 立成算法

Lập thành toán pháp 立成算法 tại thư viện viện Sử học (Hà Nội) có mã số Hv 261. Phân tích sơ bộ (xem [8]) chỉ ra rằng bản này không trùng với bản VHv 497. Tên thật sự và thời gian biên soạn cuốn sách Hv 261 chưa xác định được, vì các trang đầu tiên của bản thảo đã rách nát và các trang cuối bị mất.

A10. Thống tông toán pháp 統宗算法

Tác giả: Nghiệp sư Tạ Hữu Thường 謝有常 (Ninh Cường xã, Ninh Cường tổng, Trực Ninh huyện). Dạng chép tay. Kích thước: 22 x14.

Mã Thư viện Quốc gia: R.1194. Mã hiệu số hóa: NLVNPF-0493. Số ảnh: 112.

Thư mục sách Hán Nôm ở Thư viện Quốc gia Hà Nội, 2004: trang 87.

Sách trình bày những kiến thức cơ bản trong lĩnh vực Toán học, áp dụng Toán học trong việc tính toán thực tế: Khởi tổng vị pháp 起總位法 , Cửu chương lập thành toán pháp 九章立成算法. Cửu quy lập thành toán pháp 九歸立成算法, Toán quan điền ca 算官田 歌, Bình phân ca 平分歌 . . .

Các qui tắc tính diện tích hình phẳng đã được viết thành thơ, các đơn vị đo Trung Hoa đã được chuyển hóa sang các đơn vị đo Việt Nam, và các giải thích được trình bày bằng chữ Nôm.

A11. Toán điền trừ cửu pháp 算田 除九法

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3787.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: VHb. 50.

Có 1 bản viết, 114 trang, khổ 19,5 x 12, có chữ Nôm.

Cuốn sách được viết bằng chữ Hán, chứa các bình luận bằng chữ Nôm, trình bày cách tính diện tích các hình phẳng.

A12. Toán học cách trí 算學格致

Theo [36], cuốn sách có bốn chương và một phụ lục nói về những vấn đề liên quan đến xây dựng. Nhưng bản hiện nay chỉ còn chương 1, chương 2 và bốn trang đầu của chương 3, phần còn lại đã bị mất hoàn toàn. Chương mở đầu nói về các kí hiệu số, thực hiện các phép toán số học với các công cụ tính (bàn tính được nhắc tới nhưng không có hình vẽ), và các đơn vị trong hệ thống đo lường. Cuốn sách cũng chứa một loạt các bài toán minh họa các vấn đề này, như phân bổ tổng tiền cho một số người cụ thể. Chương 2 dành riêng cho tính toán diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng hoặc đường cong cùng với các giải thích cặn kẽ. Chương 3 trình bày cách khai căn bậc hai và bậc ba.

A13. Toán học đề uẩn 算學底蘊

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3788.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A.156.

Cuốn sách gồm 6 chương: các phép toán số học, tính diện tích các hình phẳng, khai căn bậc hai và bậc ba, các phương pháp giải toán, xây dựng, và lí thuyết toán học của nhạc.

A14. Toán học tâm pháp 算學心法

Theo [36], cuốn sách gồm 5 chương: các phép toán số học, tính diện tích các hình phẳng, khai căn bậc hai và bậc ba, tính toán trong xây dựng và tính thuế.

A15. Toán pháp 算法

Hiện có ba quyển cùng tên Toán pháp 算法 :

Quyển 1: Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3789.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A.3150; MF. 2347, Paris. EFEO. MF II/5/825.

Sách dày 308 trang, khổ 26,5x14,1.

Cuốn sách không chia thành các chương và chứa 250 bài toán về tính diện tích, giải tam giác vuông, khai căn bậc hai và bậc ba, giải phương trình đa thức.

Quyển 2: Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3790.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: VHv 496, MF.2402.

148 trang, khổ 27x15,5. Có chữ Nôm.

Quyển 3: Tác giả: Nguyễn Cẩn, hiệu Hương Huề, Tuần phủ Quảng Yên biên soạn. Kiều Oánh Mậu duyệt năm Duy Tân Kỉ dậu (1909).

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3791.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: Vhv.495, MF. 1699.

1 bản viết, 148 trang, khổ 25x14. Có chữ Nôm.

A16. Toán pháp đại thành 算法大成

Trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11] hiện có hai bản chép tay, có chữ Nôm.

Quyển 1: Số thứ tự: Vhv.1152: 136 trang, khổ 27.2x15.8 (chép năm 1934).

Quyển 2: Sao chép lại năm Bảo Đại Giáp thân (1944).

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3792.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A.2931: 240 tr., 24.7x13.3.

Ngoài bìa đề: Tiến sĩ Lương Thế Vinh 梁世榮 biên soạn. Tuy nhiên, theo [34], một số phần của cuốn sách khó có thể coi là được soạn vào thế kỉ XV. Cuốn sách không chia thành các chương và chứa 138 bài toán. Một số bài toán hình học không được phát biểu rõ, mà chỉ có hình vẽ với các kích thước đã cho. Chi tiết hơn về cuốn sách này có thể xem trong [24].

A17. Toán pháp đề cương 算法提綱

Theo [34], cuốn sách này hiện có trong thư viện Quốc gia. Phần thứ nhất của *Toán pháp đề cương* 算法提綱 (Thư viện Quốc gia) chứa giải thích chi tiết qui tắc thực hiện các phép toán với bàn tính. Phần còn lại của cuốn sách gần với các sách toán học của Trung Quốc, thí dụ, *Toán pháp thống tông* 算法統宗 của Trình Đại Vị 程大位.

A18. Toán pháp kì diệu 算法奇妙

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3793.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A. 1584.

Có 1 bản viết, 212 trang, khổ 26.7 x 14.5, 1 mục lục.

Theo [36], tên đúng của cuốn sách phải là *Tập thành chư gia huyễn nghi toán pháp* 集成諸家幻儀算法. Cuốn sách chứa phụ lục liên quan đến thu thuế thời Minh Mạng, do đó cuốn sách phải được viết không sớm hơn năm 1820. Phần đầu cuốn sách là các kí hiệu số, các đơn vị đo. Phần còn lại chứa một loạt các bài toán truyền thống như tính diện tích, mẫu số chung, khai căn bậc hai và bậc ba.

A19. Toán pháp quyển 算法卷

Tác giả: Đỗ Đức Tộ 杜德祚. Năm in: 1909. Thư viện Quốc gia.

Cuốn sách bắt đầu bằng bảng nhân và các qui tắc thực hiện tính toán trên bàn tính. Sau đó là các bài toán về phân bổ tỉ lệ, tính diện tích và thể tích, khai căn bậc hai,...

A20. Tổng tụ chư gia toán pháp đại toàn 總聚諸家算法大全

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 3825.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A.2732, MF. 2019.

Có 1 bản viết, 102 trang,khổ 26.7x15.7.

Cuốn sách trong thư viện Hán Nôm chỉ còn Quyển 3 chứa 48 bài toán và Quyển 4 chứa 32 bài toán về phân bổ có trọng, tính thể tích và các bài toán về xây dựng,...

A21. Trùng dính toán pháp chỉ nam tân biên 重訂算法指南新編

Theo [36], cuốn sách hiện có trong Thư viện viện Sử học Hà Nội, chứa các bài toán về tính diện tích, khai căn bậc hai và bậc ba, ứng dụng giải tam giác vuông và tam giác đồng dạng. Cuốn sách có sử dụng các đơn vị đo thời Gia Long và chứa một số lớn các tính toán theo cách tính của phương Tây, vì vậy có lẽ nó được viết muộn hơn, vào cuối thế kỉ XIX hoặc đầu thế kỉ XX.

A22. Ý trai toán pháp nhất đắc lục 意齋算法一得錄

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 4505.

Cuốn sách được viết bởi nhà toán học, thiên văn học Nguyễn Hữu Thận 阮有慎 (1756-1931) hiệu Ý Trai. Sách gồm 8 chương: Các phép toán số học cơ bản, bàn tính, tính diện tích các hình phẳng, phân bổ có trọng, "khai căn bậc hai" (giải phương trình bậc hai), các tính chất của tam giác vuông và sử dụng tam giác đồng dạng, "khai căn bậc ba" (giải phương trình bậc ba). Chi tiết hơn có thể xem trong [35]. Cuốn sách này đã được chúng tôi dịch và biên tập sơ bộ.

Ngoài 22 cuốn sách trên (liệt kê theo thứ tự trong [36], có thể kể thêm:

A23. Số học tiểu dẫn 數學小引

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: AB 407.

A24. Khảo xích đạc bộ pháp 考尺度步

Tác giả: Ngô Thế Vinh biên tập. Chép lại năm Hàm Nghi thứ nhất (1885).

Số thứ tự trong Danh mục sách của thư viện Hán Nôm [11]: 1645.

Mã hiệu thư viện Hán Nôm: A 1555.

Có 1 bản in, 114 trang, khổ 28x16, có hình vẽ, khổ 4,5 x 15,5.

Khảo cứu về cách đo đạc bằng thước và bằng bộ (bước chân), từ thời Hoàng Đế, Hạ, Thương, Chu đến Hán, Đường, Tống.

Ngoài 24 cuốn sách toán liệt kê trên, còn có một số sách về giáo khoa trong thư viện Hán Nôm và thư viện Quốc gia, trong đó có dạy kiến thức toán và thiên văn (xem [11], [13]). Một số sách toán Hán Nôm có thể đã bị thất lạc, có thể nằm trong thư viện các nước khác hoặc trong kho sách tư nhân mà chúng ta chưa có điều kiện khai thác. Hy vọng sách toán Hán Nôm tiếp tục được bổ sung xuyên suốt theo thời gian và qua nhiều thế hệ.

3 Về khai thác di sản sách toán Hán Nôm

Các sách toán Hán Nôm thống kê ở trên mới chỉ được giới thiệu tóm tắt bằng tiếng Việt trong [11] và tiếng Anh trong [36]. Chưa có bản dịch ra tiếng Việt (hiện đại) của cuốn sách toán Hán Nôm nào được in ra, vì vậy tuy việc nghiên cứu nội dung sách toán Hán Nôm rất thú vị và hấp dẫn, nhưng cũng còn nhiều khó khăn trong tiếp cận ngôn ngữ.

Sự cần thiết của nghiên cứu di sản sách toán Hán Nôm nói riêng, di sản sách khoa học công nghệ viết bằng chữ Hán và chữ Nôm nói chung, đã được nêu ra cách đây 40 năm (xem [10]), thậm chí 70 năm (xem [4]). Những khó khăn khi nghiên cứu mảng sách này cũng đã được đề cập đến trong [4]-[6]. Chính vì vậy mà cho tới nay, di sản này vẫn gần như chưa được khai thác. Tuy nhiên, theo chúng tôi, đây là một kho sách quí, cần được khai thác và sử dụng trong nghiên cứu lịch sử, giáo dục và khoa học.

Nghiên cứu lịch sử toán học có quan hệ hữu cơ với giảng dạy toán học. Vì vậy, khai thác mảng sách toán Hán Nôm cũng góp phần làm phong phú thêm giáo dục toán học. Thí dụ, các tư liệu lịch sử (nguồn gốc các bài toán cổ, tiểu sử các danh nhân toán học, phương pháp giải toán, phát biểu các bài toán dưới dạng ngôn ngữ dân gian và ca nôm,. . .) sẽ rất có ích trong giảng dạy toán học.

Nhiều vấn đề lịch sử toán học có lẽ chỉ được làm sáng tỏ thông qua nghiên cứu các sách toán Hán Nôm. Thí dụ, sẽ là điều thú vị nếu, thí dụ, các vấn đề sau đây được sáng tỏ hơn:

1) Ai là tác giả của *Toán pháp đại thành*?- Tạ Ngọc Liễn [10] viết: "Tác phẩm về toán của ông (Lương Thế Vinh) để lại có *Đại thành toán pháp*. . . Vũ Hữu là một nhà toán học tinh thông, đặt ra *Lập thành toán pháp*". Hoàng Xuân Hãn [4] cũng viết "cuốn sách này (Cửu chương lập thành tính pháp của Phạm Hữu Chung) được viết dựa theo cuốn *Đại thành toán pháp* của Lương Thế Vinh. Tuy nhiên, A. Volkov có lẽ cũng có lí khi viết (xem [29]): *One can conclude that the Dai thanh*

toan phap was written by Vu Huu and edited by Luong The Vinh. Chi tiết hơn có thể xem trong [3] và [26].

2) *Ý trai toán pháp nhất đắc lục* của Nguyễn Hữu Thận. Trong [6], ngoài nghiên cứu về lịch và lịch Việt Nam, Hoàng Xuân Hãn đã giới thiệu nhà thiên văn và nhà toán học Nguyễn Hữu Thận với *Ý trai toán pháp nhất đắc lục (viết năm Minh Mệnh 1829)* như sau: *Lần đầu tiên một nhà toán học Việt Nam là ông bàn tới ma phương.* Ngoài *Ma phương*, theo chúng tôi, *Ý trai toán pháp nhất đắc lục* còn chứa đựng rất nhiều sáng tạo toán học và giá trị sư phạm cần được khai thác và làm sáng tỏ.

3) Trong các sách giáo khoa và sách tham khảo toán hiện nay, các bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ, Mai em đi chợ phiên, . . .* thường được ghi chú là: *Một bài toán cổ.* Sẽ là thú vị hơn nhiều nếu biết chắc bài toán cổ ấy ở trong sách nào, ai là tác giả (Lương Thế Vinh, Nguyễn Hữu Thận, . . . ?).

4) *Quan hệ giữa toán học Trung Hoa và toán học Việt Nam.*

Hiển nhiên, các trí thức Việt Nam đã biết đến các cuốn sách toán Trung Hoa. Thí dụ, cuốn sách *Tường giải Cửu chương toán pháp* của Dương Huy (đời Tống) khắc in năm Thiệu Hưng Mậu Dần, đã từng tồn tại ở Việt Nam, được thống kê trong *Cổ học viện thư tịch thủ sách*, nhưng hiện nay chưa tìm lại được (cùng với tất cả sách của Cổ học viện, xem [12]). Trong các tác phẩm của mình (xem, thí dụ, [A22]), các tác giả Việt Nam cũng nhắc tới và đã sử dụng các sách toán Trung Hoa trong biên soạn sách. Tuy nhiên, sách toán Việt Nam cũng có rất nhiều sáng tạo (xem phân tích của A. Volkov trong các bài báo của Ông). Sẽ rất thú vị nếu câu hỏi về vai trò và giá trị sáng tạo trong các sách toán Việt Nam thời Trung đại đã ảnh hưởng đến sự tiếp thu, phát triển và truyền bá toán học ở Việt Nam được làm rõ.

5) Hiện nay không mấy nhà toán học biết chữ Hán Nôm, ngược lại, không mấy nhà Hán Nôm học quan tâm đến toán học. Việc tập hợp các nhà toán học, Hán Nôm học và các nhà nghiên cứu lịch sử khoa học tự nhiên để dịch, phân tích và so sánh văn bản, truyền bá nội dung toán học, theo chúng tôi, là rất cần thiết. Phân tích văn bản học của các sách toán Hán Nôm không chỉ giúp hiểu những vấn đề của lịch sử toán học và giảng dạy toán học, mà nếu tham chiếu với các vấn đề lịch sử khác, như những thông tin thời sự được đưa vào trong các sách toán (thí dụ, bài toán tính độ dài đường xe lửa trong [A1]), sự phát triển ngành in ở Việt Nam,. . . , theo chúng tôi, cũng là những vấn đề rất thú vị. Hy vọng trong tương lai, di sản sách toán Hán Nôm sẽ được các nhà nghiên cứu toán học, lịch sử và sư phạm quan tâm nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lương An, *Nguyễn Hữu Thận (1757-1832)*, trong *Danh nhân Bình Trị Thiên*, Nhà xuất bản Thuận Hóa, Huế, trang 102-126, (1986).

2. Nguyễn Xuân Diện, Tạ Duy Phượng, *Những tài liệu sách toán Hán Nôm Việt Nam*, Kỷ yếu Hội thảo khoa học *Các chuyên đề toán chọn lọc bồi dưỡng học sinh giỏi Trung học Cơ sở năm học 2013-2014*, Hà Giang, tr. 46-52, (2013).

3. Nguyễn Xuân Diện, Tạ Duy Phượng, *Giới thiệu di sản sách toán trong thư tịch Hán Nôm,* trong *Thông báo Hán Nôm học (2013).*

4. Hoàng Xuân Hãn, *Thi Toán đời xưa,* Báo Khoa- Học, số 13, 14 tháng 1, 2 năm 1943, trang 207- 215; In lại trong Báo Thanh Nghị, số 38, tháng 6-1943; In lại trong [8], tr. 1117-1124.

5. Hoàng Xuân Hãn, *Ma phương,* Báo Khoa- Học, số 16+17 tháng 3- 4, năm 1943. In lại trong [8], tr. 1097-1110.

6. Hoàng Xuân Hãn, *Lịch và lịch Việt Nam,* Tập san Khoa học Xã hội, Tập 9, 1982, Paris, 145 trang. In lại trong [7], tr. 895-1023.

7. *La Sơn Yên Hồ Hoàng Xuân Hãn* (Hữu Ngọc, Nguyễn Đức Hiền biên soạn), Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, (1998).

8. Đoàn Như Lệ, Tạ Duy Phương, Nguyễn Hữu Tâm, Cung Thị Kim Thành, *Về hai cuốn sách toán viết bằng chữ Hán và chữ Nôm chưa được thống kê,* trong *Thông báo Hán Nôm học (2015).*

9. Ngô Sĩ Liên, *Đại Việt sử kí toàn thư,* Nhà xuất bản Thời đại, Hà Nội, (2011).

10. Tạ Ngọc Liễn, *Vài nét về toán học ở nước ta thời xưa,* trong *Tìm hiểu khoa học kỹ thuật trong lịch sử Việt Nam,* Nhà xuất bản Khoa học Xã hội, tr. 289-314, (1979).

11. Trần Nghĩa, Gros François (chủ biên), *Di sản Hán Nôm Việt Nam–Thư mục đề yếu* (3 tập), Nhà xuất bản Khoa học Xã hội, Hà Nội, (1993).

12. Trần Ích Nguyên, *Nguồn gốc và sự di dời của Hán tịch Trung Quốc mà Cổ học viện Việt Nam lưu giữ,* Tạp chí Hán Nôm, số 2 (129), trang 3–23, (2015).

13. Tạ Duy Phượng, *Sơ lược giới thiệu di sản sách toán trong thư tịch Hán Nôm,* (với sự cộng tác của Nguyễn Xuân Diện), Kỷ yếu Hội thảo khoa học *Các chuyên đề toán chọn lọc theo xu hướng Hội nhập Quốc tế,* Nam Định, tr. 96-117, (2013).

14. Nguyễn Thủy Thanh, *Lịch sử toán học giản yếu,* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, (2012).

15. Trần Trung, Nguyễn Chiến Thắng, *Lịch sử kiến thức toán học ở trường phổ thông,* Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, (2013).

16. W. Dampier, *Un voyage au Tonkin en 1688,* Revue Indochinoise, No 9, Sept. 1909; *Một chuyến du hành đến Đàng Ngoài năm 1688.* Hoàng Anh Tuấn dịch, Nhà xuất bản Thế giới, Hà Nội, 2005, 2007.

17. Nguyen Dien Xuan, *Ancient Vietnamese Manuscript and Printed Books Related to Science, Medicine and Technology (Inventory, Classification and Preliminary Assessment),* in Alan Kam-leung Chan, Gregory K. Clancey, Hui-Chieh Loy, eds., *Historical Perspective on East Asian Science, Technology, and Medicine,* World Scientific, pp. 547-554, (2011).

18. Han Qi (韩琦), 中越历史上天文学与数学的交流 *(Trung Việt lịch sử thượng thiên văn học dữ số học đích giao lưu,)* China Historical Material of Sciences and Technology (中国科技史料), 2, tr. 3-8, (1991).

19. Li Yan, *The heritage of Mr. Zhang Yong's work on the restoration of the history of Chinese mathematics* in *Li Yan Collected papers on the history of Chinese mathematics,* vol.1, Taibei, 1954, pp. 135-146.

20. Yukio Ãhashi, *Astronomy in Mailand Southeast Asia, in Encyclopaedia of the History of Non-Western Science: Natural Science, Technology and Medicine,* 2nd Edition, Springer-Verlag, Heidelberg, (2008).

21. Zentralblatt MATH Database, Zbl 1030.01009.

22. Zhang Yong, *Sur la concordance des dates néoméniques du calendrier annamite et du calendrier de 1759 à 1886,* Meridio-occidentale sinense, 1 , 25-35, (1940).

23. Mikami Yoshio, *On the mathematical book from Annam (tiếng Nhật),* School mathematics, 14 , 3-11, (1934).

Một số bài báo khoa học tiêu biểu của Alexei Volkov về lịch sử toán học và thiên văn Việt Nam:

24. *On the origins of the Toan phap dai thanh (Great Compendium of Mathematical Methods).* In: Yvonne Dold-Samplonius, Joseph W. Dauben, Menso Folkerts, and Benno van Dallen (eds.), *From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas,* Stuttgart: Franz Steiner Verlag, pp. 369-410, (2002).

25. *History of ideas or history of textbooks: Mathematics and mathematics education in traditional China and Vietnam.* In: Horng Wann - Sheng et al. (eds.), *Proceedings of Asia- Pacific HPM 2004 Conference: History, Culture, and Mathematics Education in the New Technology era,* May 24-28, 2004. National Taichung Teachers College, Department of Mathematics Education, Taichung, pp. 57-80, (2004).

26. *Traditional Vietnamese Mathematics: The case of Lương Thế Vinh (1441-1496?) and his treatise Toan phap dai thanh (Great Compendium of Mathematical Methods).* In: Ed. U Kyi Win (ed.), Traditions of Knowledge in Southeast Asia. Yangon: Myanmar Historical Commission, Part 3, , pp. 156-177, (2005).

27. *State mathematics education in traditional China and Vietnam: formation of "mathematical hagiography" of Lương Thế Vinh 梁世榮 (1441-1496?).* In: Trinh Khac Manh and Phan Van Cac (eds.), *Confucianism in Vietnam.* Nhà Xuất Bản Khoa học Xã hội, tr. 272-309, (2006).

28. *Mathematics in Vietnam.* In: H. Selin (ed.), *Encyclopaedia of the History of Non-Western Science: Natural Science, Technology and Medicine.* Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 1425-1432, (2008).

29. *Traditional Vietnamese Astronomy in Accounts of Jesuit Missionaries.* In: Luis Saraiva and Catherine Jami (eds.), *History of mathematical sciences, Portugal and East Asia. III: The Jesuits, the Padroado and East Asian Science (1552-1773).* World Scientific, pp. 161-185, Singapore, (2008).

30. *Mathematics and Mathematics Education in Traditional Vietnam.* In: Eleanor Robson and Jacqueline Stedall (eds.), *Oxford Handbook of the History of Mathematics.* Oxford University Press,Oxford, pp. 153-176, (2009).

31. *Argumentation for state examinations: demonstration in traditional Chinese and Vietnamese mathematics.* In: Karine Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions.* Cambridge University Press, Cambridge, pp. 509-551, (2012).

32. *An Early Japanese Work on Chinese Mathematics in Vietnam: Mikami Yoshio's Study of the Vietnamese Mathematical Treatise Chi minh toan phap* 指明算法 . In: Eberchard Knobloch, Komatsu Hikosaburo and Liu Dun (eds.), *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan: A Commemoration on His Tercentenary.* In: *Proceedings in Mathematics & Statistics,* vol. 39. Springer,Tokyo, pp. 149-172, (2012).

33. *Astrology and hemerology in traditional Vietnam.* In: Jean-Noel Robert and Pierre Marsone (eds.), *Les astres et le destin: Astrologie et divination en Asie Orientale / Stars and Fate: Astrology and Divination in East Asia.* Extrême-Orient Extrême-Occident, vol. 35, PUV, Paris, pp. 113-140, (2013).

34. *History of mathematics education in Oriental Antiquity and Middle Ages.* In: Alexander Karp and Gert Schubring (eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education.* Springer, New York, pp. 55-70, 79-82, (2013).

35. *Didactical dimensions of mathematical problems: 'weighted distribution' in a Vietnamese mathematical treatise.* In: Alain Bernard and Christine Proust (eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History: Problems and Perspectives,* Boston Studies in the Philosophy and History of Science, vol. 301, pp. 247-272, Springer, Dordrecht, (2014).

36. *History of Mathematics and Mathematics Education in Vietnam: The State of the Field* (Invited Plenary Lecture), *International Conference on Mathematical Education Vietnam 2015* (ICME Vietnam 2015), Hanoi, December 19-20, (2015).

Tạp chí khoa học-Trường ĐH Quy Nhơn, ISSN:1859-0357, Tập 11, Số 1, 2017,Tr.129-138

Mở rộng và phát triển một bài toán thi Olympic sinh viên Việt Nam

Võ Đức Toàn[1] và Vũ Tiến Việt[2*]
[1]HVCH Khoa Toán, Trường Đại học Quy Nhơn, 170 An Dương Vương, Quy Nhơn, Bình Định.
[2]Khoa Toán - Tin, Học viện An ninh nhân dân, Km 9, Nguyễn Trãi, Hà Nội.
[*]Email: *vutienviet.56@gmail.com*

TÓM TẮT

Báo cáo giới thiệu một bài toán bất đẳng thức tích phân xuất hiện trong kỳ thi Olympic Toán sinh viên năm 2005, cùng với một số mở rộng và phát triển của chúng tôi dựa trên những mở rộng và phát triển của các tác giả khác trước đó.
Từ khóa: Olympic Toán sinh viên; Bất đẳng thức tích phân.

ABSTRACT

In this paper we introduce a problem from a Math Olympics Competition for Students with expansion and development. We have carried out to solve the problem by the authors open yet and also offers open-related problems.

1 Giới thiệu

Năm 2005 trong kỳ thi Olympic Toán học sinh viên có bài toán sau:

Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và thỏa mãn

$$\int_x^1 f(t)dt \geqslant \frac{1-x^2}{2}\ ,\ \forall x \in [0,1]\cdot \tag{149}$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geqslant \int_0^1 xf(x)dx \geqslant \frac{1}{3}\cdot$$

Lời giải. Ta có

$$0 \leqslant \int_0^1 [f(x)-x]^2 dx = \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2\int_0^1 xf(x)dx + \int_0^1 x^2 dx,$$

nên $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geqslant 2\int_0^1 xf(x)dx - \frac{1}{3}.$

Ngày nhận bài: 25/8/2015 ; ngày nhận đăng: 27/4/2016

Đặt $I = \int_0^1 \Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx$ và sử dụng tích phân từng phần ta được

$$I = \int_0^1 \Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx = x\int_x^1 tf(t)dt\Big|_0^1 + \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$$

Mặt khác ta có

$$I = \int_0^1 \Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx \geqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{2}dx = \frac{1}{3}.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Điều kiện (1) có thể viết thành

$$\int_x^1 f(t)dt \geqslant \int_x^1 tdt\ ,\ \forall x \in [0,1]\cdot$$

Ngô Quốc Anh, Dư Đức Thắng, Trần Tất Đạt và Đặng Anh Tuấn (ĐHQG Hà Nội, xem [3]) đã phát triển bài toán trên như sau:

Bổ đề 1. Giả thiết hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện (1); đồng thời $f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in [0,1] \quad (1')$. Khi đó ta có

$$\int_0^1 x^{n+1}f(x)dx \geqslant \frac{1}{n+3}\ ,\ (n = 0, 1, 2, ...)\cdot$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n\Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)d(x^{n+1})\\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\int_x^1 f(t)dt\Big|_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f(x)dx,\end{aligned}$$

dẫn đến $\int_0^1 x^{n+1}f(x)dx = (n+1)\int_0^1 x^n\Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx$.

Mặt khác $\int_0^1 x^n\Big(\int_x^1 f(t)dt\Big)dx \geqslant \int_0^1 x^n\frac{1-x^2}{2}dx$.

Do đó $\int_0^1 x^{n+1}f(x)dx \geqslant (n+1)\int_0^1 x^n\frac{1-x^2}{2}dx = ... = \frac{1}{n+3}$.□

<u>*Bài toán 1.*</u> Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $(1), (1')$. Khi đó

$$\int_0^1 [f(x)]^{n+1}dx \geqslant \int_0^1 x^n f(x)dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải. Do bất đẳng thức Cauchy ta có $[f(x)]^{n+1} + nx^{n+1} \geqslant (n+1)x^n f(x)$,

nên $\int_0^1 [f(x)]^{n+1}dx + n\int_0^1 x^{n+1}dx \geqslant (n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx$.

Theo Bổ đề 1 ta có

$$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = n\int_0^1 x^n f(x)dx + \int_0^1 x^n f(x)dx \geqslant \frac{n}{n+2} + \int_0^1 x^n f(x)dx.$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

<u>*Bài toán 2.*</u> Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $(1), (1')$. Khi đó

$$\int_0^1 [f(x)]^{n+1}dx \geqslant \int_0^1 x[f(x)]^n dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lời giải. Ta thấy $(f(x)-x)([f(x)]^n - x^n) \geqslant 0\ ,\ \forall x \in [0,1]$,

tức là $[f(x)]^{n+1} + x^{n+1} \geqslant x^n f(x) + x[f(x)]^n\ ,\ \forall x \in [0,1]$.

Do đó $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{n+1}dx + \frac{1}{n+2} \geqslant \int_0^1 x^n f(x)dx + \int_0^1 x[f(x)]^n dx.$

Đến đây theo Bổ đề 1 ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2. Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $(1), (1')$.

Khi đó $\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha+1} f(x)dx \geqslant \frac{1}{\alpha+3}\ ,\ (\forall\alpha > 0).$

Chứng minh. Tương tự như chứng minh Bổ đề 1.

<u>*Bài toán 3.*</u> Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $(1), (1')$. Khi đó

$$\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+1}dx \geqslant \int_0^1 x^\alpha f(x)dx\ ,\ \forall\alpha > 0.$$

Lời giải. Dễ dàng có bất đẳng thức Cauchy tổng quát sau

$$\alpha x + \beta y \geqslant x^\alpha y^\beta\ ,\ (\alpha > 0, \beta > 0, \alpha+\beta = 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0).$$

Từ đó

$$\frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+1}x^{\alpha+1} \geqslant x^\alpha f(x)\ ,\ \forall x \in [0,1],$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+1}dx + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \geqslant \int_0^1 x^\alpha f(x)dx.$$

Theo Bổ đề 2 ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha f(x)dx &= \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha f(x)dx + \frac{\alpha}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha f(x)dx \\ &\geqslant \frac{1}{\alpha+1}\int_0^1 x^\alpha f(x)dx + \frac{\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □

<u>*Bài toán 4.*</u> Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn $(1), (1')$. Khi đó

$$\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+1}dx \geqslant \int_0^1 x[f(x)]^{\alpha}dx \ , \ \forall\alpha > 0.$$

Lời giải. Tương tự như chứng minh Bài toán 3.

Các tác giả của [3] đã nêu một bài toán mở sau:

<u>*Bài toán mở số 1.*</u> Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn

$$\int_x^1 f(t)dt \geqslant \int_x^1 tdt \ , \ \forall x \in [0,1].$$

Với điều kiện nào cho α và β thì bất đẳng thức sau là đúng?

$$\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+\beta}dx \geqslant \int_0^1 t^{\alpha}[f(x)]^{\beta}dx.$$

Chúng ta tiến hành giải quyết bài toán mở số 1 nêu trên.

2 Một số kết quả chính

Bổ đề 3. Giả sử hàm f liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn (1). Khi đó

$$\int_x^1 t^k f(t)dt \geqslant \frac{1-x^{k+2}}{k+2} \ ,\forall x \in [0,1] \ , (k \in \mathbb{N}).$$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\int_x^1 y^{k-1}\Big(\int_y^1 f(t)dt\Big)dy &\geqslant \int_x^1 y^{k-1}\frac{1-y^2}{2}dy \\ &= ... = \frac{1}{k(k+2)} - \frac{x^k}{2k} + \frac{x^{k+2}}{2(k+2)}.\end{aligned}$$

Mặt khác, dùng tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned}\int_x^1 y^{k-1}\Big(\int_y^1 f(t)dt\Big)dy &= \frac{y^k}{k}\int_y^1 f(t)dt\Big|_x^1 + \frac{1}{k}\int_x^1 y^k f(y)dy \\ &= -\frac{x^k}{k}\int_x^1 f(t)dt + \frac{1}{k}\int_x^1 y^k f(y)dy.\end{aligned}$$

Do đó

$$-\frac{x^k}{k}\int_x^1 f(t)dt + \frac{1}{k}\int_x^1 y^k f(y)dy \geqslant \frac{1}{k(k+2)} - \frac{x^k}{2k} + \frac{x^{k+2}}{2(k+2)}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_x^1 y^k f(y)dy &\geqslant x^k\int_x^1 f(t)dt + \frac{1}{k+2} - \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k+2}}{2(k+2)}\\ &\geqslant x^k\frac{1-x^2}{2} + \frac{1}{k+2} - \frac{x^k}{2} + \frac{kx^{k+2}}{2(k+2)}\\ &= \frac{1-x^{k+2}}{k+2}\ .\square\end{aligned}$$

Nhận xét. Bằng cách tương tự, ta có thể chứng minh Bổ đề 3 cũng đúng khi $k \in [1, \infty)$. Tức là

$$\int_x^1 t^\alpha f(t)dt \geqslant \frac{1-x^{\alpha+2}}{\alpha+2}\ , \forall x \in [0,1]\ , (\forall \alpha \geqslant 1)$$

Bổ đề 4. Giả sử f là hàm không âm và liên tục trên $[0, 1]$ sao cho (1) thỏa mãn. Khi đó với mỗi $x \in [0, 1]$ và $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\int_x^1 [f(t)]^k dt \geqslant \frac{1-x^{k+1}}{k+1}.$$

Chứng minh. Ta thấy

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \int_x^1 (f(t)-t)([f(t)]^k - t^k)dt\\ &= \int_x^1 [f(t)]^{k+1} - \int_x^1 t^k f(t)dt - \int_x^1 t[f(t)]^k dt + \int_x^1 t^{k+1}dt,\end{aligned}$$

điều này kéo theo

$$\int_x^1 [f(t)]^{k+1} \geqslant \int_x^1 t^k f(t)dt + \int_x^1 t[f(t)]^k dt - \frac{1-x^{k+2}}{k+2}.$$

Sử dụng bổ đề 3 ta có

$$\int_x^1 [f(t)]^{k+1} \geqslant \int_x^1 t[f(t)]^k dt \quad (*)$$

Tiếp tục chứng minh bằng quy nạp. Rõ ràng Bổ đề 4 đúng với $k = 1$.

Giả sử $\displaystyle\int_x^1 [f(t)]^k dt \geqslant \frac{1-x^{k+1}}{k+1}$, ta sẽ chứng tỏ rằng $\displaystyle\int_x^1 [f(t)]^{k+1} dt \geqslant \frac{1-x^{k+2}}{k+2}$.

Thật vậy, ta có

$$\int_x^1 \Big(\int_y^1 [f(t)]^k dt\Big) dy \geqslant \int_x^1 \frac{1-y^{k+1}}{k+1} dy = ... = \frac{1}{k+2} - \frac{x}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$$

Mặt khác. dùng tích phân từng phần ta được

$$\begin{aligned}\int_x^1 \Big(\int_y^1 [f(t)]^k dt\Big) dy &= y \int_y^1 [f(t)]^k dt\Big|_x^1 + \int_x^1 y[f(y)]^k dy \\ &= -x\int_x^1 [f(t)]^k dt + \int_x^1 y[f(y)]^k dy\end{aligned}$$

Như thế

$$-x\int_x^1 [f(t)]^k dt + \int_x^1 y[f(y)]^k dy \geqslant \frac{1}{k+2} - \frac{x}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)},$$

do vậy dẫn đến

$$\begin{aligned}\int_x^1 y[f(y)]^k dy &\geqslant x\int_x^1 [f(t)]^k dt + \frac{1}{k+2} - \frac{x}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\ &\geqslant x\frac{1-x^{k+1}}{k+1} + \frac{1}{k+2} - \frac{x}{k+1} + \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1-x^{k+2}}{k+2}.\end{aligned}$$

Dến đây do $(*)$ ta được

$$\int_x^1 [f(t)]^{k+1} \geqslant \int_x^1 t[f(t)]^k dt \geqslant \frac{1-x^{k+2}}{k+2}.$$

điều này hoàn thành chứng minh. □

Bài toán 5. Giả sử f là hàm không âm và liên tục trên $[0,1]$. Nếu (1) thỏa mãn, thì với mỗi $m,n \in \mathbb{N}$, ta có

$$\int_0^1 [f(x)]^{m+n} dx \geqslant \int_0^1 x^m [f(x)]^n dx.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy tổng quát ta được

$$\frac{n}{m+n}[f(x)]^{m+n} + \frac{m}{m+n}x^{m+n} \geqslant x^m [f(x)]^n,$$

điều này kéo theo

$$\frac{n}{m+n}\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx + \frac{m}{m+n}\int_0^1 x^{m+n}dx \geqslant \int_0^1 x^m[f(x)]^n dx.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx &\geqslant \frac{m}{m+n}\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx + \int_0^1 x^m[f(x)]^n dx - \frac{m}{(m+n)(m+n+1)}\\ &= \int_0^1 x^m[f(x)]^n dx + \frac{m}{m+n}\Big(\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx - \frac{1}{m+n+1}\Big).\end{aligned}$$

Do Bổ đề 4 ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx \geqslant \frac{1}{m+n+1}$. Từ đây ta được

$$\int_0^1 [f(x)]^{m+n}dx \geqslant \int_0^1 x^m[f(x)]^n dx\ .\square$$

Bài toán 6. Giả sử f là hàm liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f(x) \geqslant 1\ , \forall x \in [0,1]$. Nếu (1) thỏa mãn, thì với mỗi $\alpha, \beta > 0$ ta có

$$\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+\beta}dx \geqslant \int_0^1 x^\alpha [f(x)]^\beta dx \quad (**)$$

Lời giải. Bằng cách chứng minh tương tự như với Bài toán 5 ta thấy $(**)$ đúng khi

$$\int_0^1 [f(x)]^{\alpha+\beta}dx \geqslant \frac{1}{\alpha+\beta+1}.$$

Từ đó ta chỉ cần chứng tỏ rằng $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{\eta}dx \geqslant \frac{1}{\eta+1}\ , (\eta > 0)$.

Vì $f(x) \geqslant 1\ , \forall x \in [0,1]$ và $[\eta] \leqslant \eta < [\eta]+1$ ta có $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{\eta}dx \geqslant \int_0^1 [f(x)]^{[\eta]}dx$.
Do Bổ đề 4 ta được

$$\int_0^1 [f(x)]^{\eta}dx \geqslant \int_0^1 [f(x)]^{[\eta]}dx \geqslant \frac{1}{[\eta]+1} \geqslant \frac{1}{\eta+1}\ .\square$$

Nhận xét. 1) Điều kiện $f(x) \geqslant 1\ , \forall x \in [0,1]$ trong Bài toán 6 là cần thiết để $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{\eta}dx \geqslant \frac{1}{\eta+1}\ , (\eta > 0)$. Chẳng hạn xét $\eta = \frac{1}{2}$ và

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 2(2x-1) & \text{nếu } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{liên tục trên } [0,1],$$

thì $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt \geqslant \frac{1-x^2}{2}$, nhưng $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^{\frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{2}{3}$.

2) Điều kiện $f(x) \geqslant 1$, $\forall x \in [0,1]$ có thể bỏ qua nếu giả thiết $\alpha+\beta \geqslant 1$.

Bài toán 7. Giả sử f là hàm không âm và liên tục trên $[0,1]$ sao cho (1) thỏa mãn. Khi đó với mỗi $\alpha, \beta > 0$ mà $\alpha+\beta \geqslant 1$, ta có

$$\int_0^1 [f(t)]^{\alpha+\beta}dt \geqslant \frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

và từ đó ta được bất đẳng thức $(**)$ như ở bài toán 6.

Lời giải. Đặt $k = [\alpha+\beta]$ và $\gamma = \{\alpha+\beta\} = \alpha+\beta-[\alpha+\beta] = \alpha+\beta-k$.

Ta thấy $k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \gamma < 1$ và $\frac{k}{\alpha+\beta} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = 1$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy tổng quát ta có

$$\frac{k}{\alpha+\beta}[f(t)]^{\alpha+\beta} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}t^{\alpha+\beta} \geqslant [f(t)]^k t^\gamma, \forall t \in [0,1],$$

dẫn đến với mỗi $x \in [0,1]$ thì

$$\frac{k}{\alpha+\beta}\int_x^1 [f(t)]^{\alpha+\beta}dt + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\int_x^1 t^{\alpha+\beta}dt \geqslant \int_x^1 [f(t)]^k t^\gamma dt.$$

Mặt khác, dùng tích phân từng phần và chú ý Bổ đề 4 ta có

$$\begin{aligned}
\int_x^1 [f(t)]^k t^\gamma dt &= -\int_x^1 t^\gamma d\Big(\int_t^1 [f(s)]^k ds\Big) \\
&= -t^\gamma \int_t^1 [f(s)]^k ds\Big|_x^1 + \int_x^1 \Big(\int_t^1 [f(s)]^k ds\Big)d(t^\gamma) \\
&= x^\gamma \int_x^1 [f(s)]^k ds + \int_x^1 \Big(\int_t^1 [f(s)]^k ds\Big)d(t^\gamma) \\
&\geqslant x^\gamma \frac{1-x^{k+1}}{k+1} + \int_x^1 \frac{1-t^{k+1}}{k+1}d(t^\gamma) \\
&= \frac{1}{k+1}\Big[(x^\gamma - x^{\alpha+\beta+1}) + (1-x^\gamma) - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1}(1-x^{\alpha+\beta+1})\Big],
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 [f(t)]^k t^\gamma dt \geqslant \frac{1}{k+1}(1 - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+1}) = \frac{1}{\alpha+\beta+1}.$$

Lại có $\displaystyle\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\int_0^1 t^{\alpha+\beta}dt = \frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$.

Từ đây ta được

$$\frac{k}{\alpha+\beta}\int_0^1 [f(t)]^{\alpha+\beta}dt \geqslant \int_0^1 [f(t)]^k t^\gamma dt - \frac{\gamma}{\alpha+\beta}\int_0^1 t^{\alpha+\beta}dt$$
$$\geqslant \frac{1}{\alpha+\beta+1}(1-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}) = \frac{1}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{k}{\alpha+\beta},$$

suy ra điều cần phải chứng minh. □

Chúng ta phát biểu thêm một số bài toán mở khác:

Bài toán mở số 2. Giả sử $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ là các hàm liên tục và g là hàm không giảm thỏa mãn

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt \tag{150}$$
$$\int_x^b f(t)dt \geqslant \int_x^b g(t)dt\,, \forall x \in [a, b]. \tag{151}$$

Khi đó với mỗi hàm h là hàm lồi trên $[0, \infty)$ ta có $\int_a^b h(f(t))dt \geqslant \int_a^b h(g(t))dt.$

Đặc biệt, lấy $h(t) := t^\alpha$, $(\alpha > 0)$ là hàm lồi trên $[0, \infty)$ ta được

$$\int_a^b [f(t)]^\alpha dt \geqslant \int_a^b [g(t)]^\alpha dt.$$

Bài toán mở số 3. Giả sử $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ là các hàm liên tục và g là hàm không giảm, khả vi thỏa mãn điều kiện (3). Khi đó ta có

$$\int_x^b [f(t)]^\beta dt \geqslant \int_x^b [g(t)]^\beta dt\,, \forall x \in [a, b]\,, (\beta \geqslant 1).$$

Bài toán mở số 4. Giả sử $f, g : [a, b] \to [0, \infty)$ là các hàm liên tục và g là hàm không giảm, khả vi thỏa mãn điều kiện (3). Khi đó nếu

$$\int_x^b [f(t)]^\alpha dt \geqslant \int_x^b [g(t)]^\alpha dt\,, \forall x \in [a, b]\,, (\alpha > 0), \tag{152}$$

thì ta có

$$\int_x^b [f(t)]^\beta dt \geqslant \int_x^b [g(t)]^\beta dt\,, \forall x \in [a, b]\,, (\beta \geqslant \alpha).$$

3 Kết luận

Bước đầu chúng tôi đã giải quyết được một vài trường hợp riêng đối với Bài toán mở số 1 mà các tác giả của [3] nêu ra. Các kết quả này sẽ được đưa vào trong nội dung Luận văn thạc sĩ của học viên cao học Võ Đức Toàn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. *Bất đẳng thức*. (Bản Tiếng Việt). Bản dịch của Nguyễn Khắc Lân, Nguyễn Duy Tiến, Nguyễn Hữu Ngự. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, (2002).
2. D.S. Mitrinoviic , J.E. Pecaric and A.M. Fink. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London, (1993).
3. Q.A. Ngo, D.D. Thang, T.T. Dat and D.A. Tuan. *Notes on an integral inequality*. J. Inequal. Pure & Appl. Math. , 7(4) (2006).
4. George A. Anastassiou. *Advanced Inequalities*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, (2011).
5. D.S. Mitrinovic (Author), P.M. Vasic (Contributor). *Analytic Inequalities*. Springer. Softcover reprint of the original 1st ed. 1970 edition (February, 2012).